TD 13 : Dérivabilité

Étude de la dérivabilité

Exercice 1:
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x|x|$
2. $g : x \mapsto \dfrac{x}{|x|+1}$
3. $h : x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$

Exercice 2:
Soit $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est périodique.
2. Est-elle continue en 0 ? Dérivable en 0 ?
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3:
Soit $f : x \mapsto x^x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on peut la prolonger par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 4: Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)$.

Calculs de dérivée

Exercice 5: Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$
2. $f_2 : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$
3. $f_3 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
4. $f_4 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$
5. $f_5 : x \mapsto \text{Arctan}(\text{sh}(x))$
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{\text{ch}(x) - \cos(x)}{\text{sh}(x) + \sin(x)}$

Exercice 6: Soit $f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{x-1}\right) - \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer f'.
3. En déduire une autre expression de f.

Théorème de Rolle

Exercice 7: Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in]0;1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Exercice 8: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f n'est pas périodique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9: [*] *Théorème de Rolle généralisé*
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$. Montrer que

$$\exists c \in]0;+\infty[\text{ tel que } f'(c) = 0.$$

Théorèmes des accroissements finis

Exercice 10: A l'aide de l'égalité des accroissements finis, étudier la limite de $f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

Exercice 11: On s'intéresse, pour $n \in \mathbb{N}^*$, à la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. A l'aide de l'égalité des accroissements finis, montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}$$
2. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.
3. En déduire un encadrement de S_n. En déduire la nature de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Exercice 12: Résoudre l'équation $5^x + 2^x = 3^x + 4^x$ d'inconnue réelle x.

Convexité

Exercice 13: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et périodique.
Montrer que f est constante.

Exercice 14: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.
Montrer que f est continue.
Le résultat persiste-t-il si f est uniquement définie sur $[0;1]$?

Exercice 15: Montrer que $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave.
En déduire que pour tout $x, y \in]1; +\infty[$,
$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

Exercice 16: *Inégalité de Young*
Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Étude de suites récurrentes

Exercice 17: Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Dérivées successives

Exercice 18: Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2\ln(x) \text{ pour } x > 0 \\ 0 \text{ pour } x \leqslant 0 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ mais pas de classe $\mathscr{C}^2$.

Exercice 19: Calculer les dérivées n-ième des fonctions suivantes

1. $f_1 : x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$
2. $f_2 : x \mapsto x^2(1+x)^n$
3. $f_3 : x \mapsto \cos^3(x)$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$

Exercice 20:

1. Calculer de deux façons les dérivées k-ième de la fonction $x \mapsto x^{2n}$.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}^2$.

Exercice 21: Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui est nulle sur $\mathbb{R}\backslash[-1;1]$ et telle que $h(t) = (1-t^2)^3$ pour $t \in [-1;1]$.
Déterminer le plus grand entier $k \in \mathbb{N}$ telle que h est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22: Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Considérons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} x^3 \text{ si } x < 1 \\ a + bx + cx^2 \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$$
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer les triplets $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que h soit de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.