

Exercice 1:

1. $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k.$
2. $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f(x_1) \neq f(x_2).$
3. $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, m > n.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 3 \Rightarrow x \geq 2.$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1.$
6. $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 3 \Leftrightarrow n > 2.$

Exercice 2:

1. $\exists x \in A, \forall y \in B, (P(x) \text{ et non } Q(x, y)).$
2. $(\exists x \in E, A(x)) \text{ et } (\exists x \in E, \text{ non } A(x)).$
3. $\left(\forall x \in E, \text{ non } A(x) \right) \text{ ou } \left(\exists (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2, A(x_1) \text{ et } A(x_2) \right).$

Exercice 3:

1. C'est faux. Posons $x = 1$ et $y = 2$, on a $x + y^2 = 5 \neq 1.$
2. C'est faux. Posons $x = 2$. Soit $y \in \mathbb{R}, y^2 \geq 0 > -1 = 1 - x$ donc $x + y^2 \neq 1.$
3. C'est faux. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = -y^2$. Alors $x + y^2 = 0 \neq 1.$
4. C'est vrai. Posons $x = 1$ et $y = 0$, alors $x + y^2 = 1.$
5. C'est faux. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Premier cas, si $x \neq 1$, posons $y = 0, x + y^2 = x \neq 1.$
Deuxième cas, si $x = 1$ posons $y = 1, x + y^2 = 2 \neq 1.$
6. C'est vrai. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = 1 - y^2$ alors $x + y^2 = 1$

Exercice 4: On raisonne par l'absurde. Supposons que l'ensemble des nombres premiers (on le note $\mathcal{P}$) soit fini. Alors, $\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n, \mathcal{P} = \{p_1; \dots; p_n\}.$

Notons $N = \prod_{k=1}^n p_k + 1$. Soit N est premier, soit il ne l'est pas.

- Supposons N premier. Alors, $\exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket, N = p_i$. Or, $N > p_i$ donc c'est absurde.
- Supposons N non premier. Alors, $\exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket, p_i | N$.
Or, $p_i | \prod_{k=1}^n p_k$ donc, par différence, $p_i | \left(N - \prod_{k=1}^n p_k \right)$, i.e. $p_i | 1$. C'est absurde.

Donc, l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 5:

1. La proposition est fausse car on peut prouver sa négation : $\exists x, y \in \mathbb{R}, x^2 = y^2 \text{ et } x \neq y.$
En effet, pour $x = 1$ et $y = -1$, on a $x^2 = y^2$ et $x \neq y.$
2. Montrons que la proposition est vraie i.e. montrons que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 \neq y^2 \Rightarrow x \neq y.$
Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On raisonne par contraposition. Supposons que $x = y$. Donc $x^2 = y^2.$

Exercice 6:

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On raisonne par contraposée. Supposons que $x \neq 0$. On a donc $x > 0$.

Posons $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$, on a $\varepsilon < x$.

D'où le résultat.

2. On raisonne par double implication.

$$\Leftarrow: a = b = 0 \Rightarrow a + b = 0 = 0.$$

$\Rightarrow$: On raisonne par contraposée.

Supposons $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Or a et b sont des entiers positifs donc $a > 0$ ou $b > 0$.

On a donc $a + b \neq 0$.

3. On raisonne par récurrence.

$$P(n) : 6 \mid 5n^3 + n$$

- Initialisation : Pour $n = 1$, $5n^3 + n = 6$ donc $P(1)$ est vraie.

- Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$$5(n+1)^3 + n + 1 = 5(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n + 1 = 5n^3 + n + 15n^2 + 15n + 6 = 5n^3 + n + 15n(n+1) + 6$$

Or, 2 divise $n(n+1)$ donc 6 divise $15n(n+1)$.

Par somme, 6 divise $5(n+1)^3 + n + 1$ et $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, on a le résultat souhaité.

4. On raisonne par double implication.

$\Leftarrow$ Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = b$. Ils sont bien multiples l'un de l'autre.

$\Rightarrow$ Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, multiples l'un de l'autre.

Si l'un des deux est nul alors l'autre aussi donc on suppose $(a, b) \neq (0, 0)$.

$$\text{Soit } (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2, \quad a = k_1 b \text{ et } b = k_2 a$$

$$\Rightarrow a = k_1 k_2 a$$

$$\Rightarrow 1 = k_1 k_2$$

$$\Rightarrow k_1 = k_2 = 1$$

Les entiers sont bien égaux.

Exercice 7: Soit $n \in \mathbb{N}$ on note $P(n)$ la propriété suivante " $10^n - 1$ est divisible par 9".

Démontrons à l'aide d'une récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

- Initialisation: Pour $n = 0$, $10^0 - 1 = 0 = 9 \times 0$ donc $P(0)$ est vraie.

- Hérédité: Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a :

$$10^{n+1} - 1 = 10^{n+1} - 10^n + 10^n - 1 = 9 \times 10^n + 10^n - 1.$$

Or $9 \mid 9 \times 10^n$ et $9 \mid 10^n - 1$ par hypothèse de récurrence d'où $9 \mid 10^{n+1} - 1$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 9 \mid 10^n - 1.$$

Exercice 8: Soit $n \in \mathbb{N}$ on note $P(n)$ la propriété suivante " $u_n = 2^{n+1} + 3^n$ ".

Démontrons à l'aide d'une récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

- Initialisation: Pour $n = 0$, $2^{n+1} + 3^n = 2 + 1 = 3$. Or $u_0 = 3$ donc $P(0)$ est vraie.
Pour $n = 1$, $2^{n+1} + 3^n = 4 + 3 = 7$. Or $u_1 = 7$ donc $P(1)$ est vraie.
- Hérédité: Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 5(2^{n+2} + 3^{n+1}) - 6(2^{n+1} + 3^n) \\ &= 2^{n+2}(5 - 3) + 3^{n+1}(5 - 2) \\ &= 2^{n+3} + 3^{n+2} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence double,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} + 3^n.$$

Exercice 9: Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des entiers naturels p et q tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on note $P(n)$ la propriété suivante " $\exists(p, q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q+1)$ ".

Démontrons à l'aide d'une récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

- Initialisation: Pour $n = 1$, $n = 2^0 \times (2 \times 0 + 1)$ donc $P(1)$ est vraie.
- Hérédité: Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $P(k)$ soit vraie.
 - Si $n+1$ est impair, alors $\exists q \in \mathbb{N}, n+1 = 2^0(2q+1)$, donc $P(n+1)$ est vraie.
 - Si $n+1$ est pair, alors il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $n+1 = 2k$, on utilise l'hypothèse de récurrence au rang k , donc $\exists(p, q) \in \mathbb{N}^2, k = 2^p(2q+1)$ d'où $n = 2^{p+1}(2q+1)$, donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists(p, q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 10: On raisonne par analyse et synthèse.

Analyse : Supposons qu'il existe une solution réelle x à l'équation $\sqrt{x+4} = x-2$. Tout d'abord, on a $x \geq -4$ pour que l'équation ait du sens. On a $x+4 = (x-2)^2$ d'où $x^2 - 5x = 0$ d'où $x = 0$ ou $x = 5$.

Synthèse : Pour $x = 5$, on a bien $\sqrt{x+4} = 3 = x-2$. Pour $x = 0$, $\sqrt{x+4} = 2 \neq -2 = x-2$ donc 0 n'est pas solution de l'équation.

Conclusion : $S = \{5\}$.

Exercice 11: On raisonne par analyse et synthèse.

- Analyse: On suppose que

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2, \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2, \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)}$ i.e. $1 = (a+b)x + 2a - b$.

Pour $x = 0$ et $x = -1$, on obtient $\begin{cases} 1 = 2a - b \\ 1 = a - 2b \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$

- Synthèse: Posons $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2, \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} = \frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2} = \frac{1/3(x+2) - 1/3(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

Conclusion: Il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, \quad \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}.$$

Exercice 12: On raisonne par analyse-synthèse. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Analyse: Supposons qu'il existe une fonction constante k et une fonction h telle que $h(0) = 0$ et telles que $f = k + h$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k + h(x)$. En évaluant en 0, on obtient : $f(0) = k + h(0) = k$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) - f(0)$ et $k = f(0)$.
- Synthèse: Posons $k = f(0)$ et $h = f - f(0)$.
Ces deux fonctions répondent au problème posé.

Exercice 13:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ la propriété suivante : " Si Arnaud laisse un morceau de la tablette de taille $n \times n$ à Arthur, alors il est en mesure de gagner la partie ". Démontrons à l'aide d'une récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

- Initialisation: Pour $n = 1$, Arnaud laisse un seul carré de chocolat à Arthur donc il gagne. $P(1)$ est vraie.
- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(k)$ est vraie. Supposons que Arnaud laisse un morceau de la tablette de taille $(n+1) \times (n+1)$ à Arthur. Arthur découpe la tablette et rend à Arnaud une tablette rectangulaire de taille $k \times (n+1)$ où $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Arnaud peut donc découper à son tour la tablette et laisser un morceau de taille $k \times k$ à Arthur. Or $P(k)$ est vraie par hypothèse de récurrence, donc Arnaud est en mesure de gagner la partie.
D'où $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion: Si Arnaud laisse un morceau carré de la tablette à Arthur, alors il sera en mesure de gagner la partie à coup sur.