Chapitre 9 : Équations différentielles linéaires

★ Utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière d'une EDL d'ordre 1.

Exercice 1 [Solution]
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E): \quad (1+\operatorname{ch}(x))y' - \operatorname{sh}(x)y = (1+\operatorname{ch}(x))\operatorname{sh}(x)$$

★ Résoudre une équation différentielle non normalisée à l'aide d'un recollement.

Exercice 2 [Solution]
On considère l'équation différentielle $(E): \operatorname{sh}(x)y' - \operatorname{ch}(x)y = \operatorname{ch}(x)$.

1. Déterminer les plus grands intervalles sur lesquels l'équation (E) peut s'écrire sous forme normalisée.
2. Résoudre (E) sur chacun de ces intervalles.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

★ Résoudre une EDL d'ordre 2 avec second membre.

Exercice 3 [Solution]
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E): \quad y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^x \cos^2(x)$$

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
La fonctions $x \mapsto 1+\mathrm{ch}(x)$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. L'équation devient

$$(E) \quad : \quad y'(x) - \frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)} y(x) = \mathrm{sh}(x)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation homogène associée.

$$(E_H) \quad : \quad y' - \frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)} y = 0$$

L'ensemble des solutions de (E_H) est $\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\ln(1+\mathrm{ch}(x))}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \lambda(1+\mathrm{ch}(x)), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Nous cherchons ensuite une solution particulière par variations de la constante.
Posons $y_p : x \mapsto \lambda(x)(1+\mathrm{ch}(x))$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction y_p est alors dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ y_p'(x) = \lambda'(x)(1+\mathrm{ch}(x)) + \lambda(x)\mathrm{sh}(x))$.

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)(1+\mathrm{ch}(x)) + \lambda(x)\mathrm{sh}(x)) + -\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\lambda(x)(1+\mathrm{ch}(x)) = \mathrm{sh}(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)(1+\mathrm{ch}(x)) = \mathrm{sh}(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)} \end{aligned}$$

Pour $\lambda : x \mapsto \ln(1+\mathrm{ch}(x))$, y_p est solution de (E).
Ainsi, la fonction $y_p : x \mapsto (1+\mathrm{ch}(x))\ln(1+\mathrm{ch}(x))$ est une solution particulière de (E).
Conclusion :

$$S = \{x \mapsto (\lambda + \ln(1+\mathrm{ch}(x)))(1+\mathrm{ch}(x)),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 2 [Enoncé]
On considère l'équation différentielle $(E) :\ \mathrm{sh}(x)y' - \mathrm{ch}(x)y = \mathrm{ch}(x)$.

1. La fonction sh s'annule uniquement en 0. L'équation se normalise donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Résolvons l'équation $(E) :\ y' - \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}y = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   C'est une EDL linéaire d'ordre 1 d'équation homogène dont les solutions de l'équation homogène sont de la forme :
   $$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\ln(\mathrm{sh}(x))} \text{ i.e. } x \mapsto \lambda\,\mathrm{sh}(x) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\,.$$
   On remarque que la fonction constante à -1 est solution de (E).
   Par conséquent, $S(\mathbb{R}_+^*) = \{x \mapsto \lambda\,\mathrm{sh}(x) - 1, \lambda \in \mathbb{R}\}$. De la même façon, $S(\mathbb{R}_-^*) = \{x \mapsto \mu\,\mathrm{sh}(x) - 1, \mu \in \mathbb{R}\}$.
3. Soit y une fonction de la variable réelle. La fonction y est solution de (E) si et seulement si y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-*$ et en 0. D'où y est solution de (E) si et seulement si
   $$\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \lambda\,\mathrm{sh}(x) - 1 & (1) \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_-^*, y(x) = \mu\,\mathrm{sh}(x) - 1 & (2) \\ y \text{ dérivable en } 0. & (3) \\ \mathrm{sh}(0)y'(0) - \mathrm{ch}(0)y(0) = \mathrm{ch}(0) \text{ i.e. } y(0) = -1 & (4) \end{cases}$$
   Plaçons nous dans le cas où $(1), (2)$ et (4) sont vérifiées. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$\frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{\lambda\,\mathrm{sh}(x) - 1 + 1}{x} = \lambda\frac{\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(0)}{x-0} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \lambda\,\mathrm{sh}'(0) = \lambda\,\mathrm{ch}(0) = \lambda$$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,
   $$\frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{\mu\,\mathrm{sh}(x) - 1 + 1}{x} = \mu\frac{\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(0)}{x-0} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} \mu\,\mathrm{sh}'(0) = \mu\,\mathrm{ch}(0) = \mu$$
   Par conséquent, y dérivable en 0 si et seulement si $\lambda = \mu$.
   Conclusion : y est solution de (E) si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \lambda\,\mathrm{sh}(x) - 1$.
   Autrement dit : $S(\mathbb{R}) = \{x \mapsto \lambda\,\mathrm{sh}(x) - 1, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3 [Enoncé] Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$(E_H) \quad : \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

dont l'équation caractéristique est $(Ec) : r^2 - 2x + 5 = 0$, dont le discriminant $\Delta = -16$. Les solutions de (E_c) sont donc $1 - 2\mathbf{i}$ et $1 + 2\mathbf{i}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_h : x \mapsto A\mathbf{e}^x \cos(2x) + B\mathbf{e}^x \sin(2x), \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Nous devons maintenant chercher une solution particulière. Nous ne reconnaissant pas un second membre classique mais, pour tout x réel, $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$ d'où $\mathbf{e}^x \cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)\mathbf{e}^x + \frac{1}{2}\mathbf{e}^x$. Par le principe de superposition, nous allons chercher une solution particulière pour chacune des équations

$$(E_1) \quad : \quad y'' - 2y' + 5y = \tfrac{1}{2}\cos(2x)\mathbf{e}^x$$
$$(E_2) \quad : \quad y'' - 2y' + 5y = \tfrac{1}{2}\mathbf{e}^x$$

et nous obtiendrons une solution particulière de (E) en additionnant ces deux solutions particulières.

Recherche d'une solution particulière pour (E_1) :
Comme $\frac{1}{2}\cos(2x)\mathbf{e}^x = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\mathbf{e}^{(1+2\mathbf{i})x}\right)$, introduisons l'équation différentielle $(E_0) : y'' - 2y' + 5y = \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(1+2\mathbf{i})x}$.
Si on trouve une solution particulière de (E_0) alors sa partie réelle sera une solution de (E_1).
Puisque $1+2\mathbf{i}$ est solution de l'équation caractéristique, nous cherchons une solution particulière de (E_0) sous la forme $y_{p_0} : x \mapsto \lambda x\mathbf{e}^{(1+2\mathbf{i})x}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_{p_0}(x) = \lambda(1 + (1 + 2\mathbf{i})x)\mathbf{e}^{(1+2\mathbf{i})x}$ et
$y''_{p_0}(x) = \lambda(1 + 2\mathbf{i} + (1 + 2\mathbf{i})(1 + (1 + 2\mathbf{i})x))\mathbf{e}^{(1+2\mathbf{i})x} = (2 + 4\mathbf{i} + (-3 + 4\mathbf{i})x)\mathbf{e}^{(1+2\mathbf{i})x}$.

$$\begin{aligned}
y_{p_0} \text{ est solution de } (E_0) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y''_{p_0}(x) - 2y'_{p_0}(x) + 5y_{p_0}(x) = \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(1+2\mathbf{i})x} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda\left[(2 + 4\mathbf{i} + (-3 + 4\mathbf{i})x) - 2(1 + (1 + 2\mathbf{i})x) + 5x\right] = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow 4\mathbf{i}\lambda = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\mathbf{i}}{8}
\end{aligned}$$

La fonction $y_{p_0} : x \mapsto -\dfrac{\mathbf{i}}{8}x\mathbf{e}^{(1+2\mathbf{i})x}$ est solution particulière de (E_0).
Par conséquent, $y_{p_1} = \mathrm{Re}(y_{p_0})$ est solution de (E_1). Plus précisément, $y_{p_1} : x \mapsto \dfrac{1}{8}x\sin(2x)\mathbf{e}^x$ est solution de (E_1).

Recherche d'une solution particulière pour (E_2) :
Puisque 1 n'est pas solution de l'équation caractéristique, nous cherchons une solution particulière de (E_2) sous la forme $y_{p_2} : x \mapsto \lambda\mathbf{e}^x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
y_{p_2} \text{ est solution de } (E_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ y''_{p_2}(x) - 2y'_{p_2}(x) + 5y_{p_2}(x) = \frac{1}{2}\mathbf{e}^x \\
&\Leftrightarrow \quad 4\lambda = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

La fonction $y_{p_2} : x \mapsto \frac{1}{8}\mathbf{e}^x$ est solution de (E_2).

On peut à présent conclure, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S_E(\mathbb{R}) = \left\{ x \mapsto A\mathbf{e}^x\cos(2x) + B\mathbf{e}^x\sin(2x) + \frac{1}{8}(x\sin(2x) + 1)\mathbf{e}^x,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$