Chapitre 8 : Calculs de primitives et d'intégrales

★ Primitiver des fonctions du type $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.

Exercice 1 [Solution]
Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{4x}\sin(3x)\mathrm{d}x$.

★ Primitiver des fractions rationnelles dont le dénominateur est de degré 2.

Exercice 2 [Solution]
Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$.

★ Savoir utiliser une intégration par partie.

Exercice 3 [Solution]
Déterminer une primitive de la fonction Arctan.

★ Savoir utiliser un changement de variable.

Exercice 4 [Solution]
Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}^{\mathrm{Arcsin}(x)}\mathrm{d}x$.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
Première méthode : passage en complexe.
On a $\displaystyle\int_0^\pi e^{4x}\sin(3x)\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left(\int_0^\pi e^{(4+3\mathbf{i})x}\mathrm{d}x\right)$.
Or $\displaystyle\int_0^\pi e^{(4+3\mathbf{i})x}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4+3\mathbf{i}}e^{(4+3\mathbf{i})x}\right]_0^\pi = \frac{4-3\mathbf{i}}{25}(e^{(4+3\mathbf{i})\pi}-1) = \frac{-4+3\mathbf{i}}{25}(e^{4\pi}+1)$.
D'où $\displaystyle\int_0^\pi e^{4x}\sin(3x)\mathrm{d}x = \frac{3}{25}(e^{4\pi}+1)$.
Deuxième méthode : IPP successives.
On a $\displaystyle\int_0^\pi e^{4x}\sin(3x)\mathrm{d}x = \left[e^{4x}\frac{-\cos(3x)}{3}\right]_0^\pi + \frac{4}{3}\int_0^\pi e^{4x}\cos(3x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(e^{4\pi}+1) + \frac{4}{3}\left(\left[e^{4x}\frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^\pi - \frac{4}{3}\int_0^\pi e^{4x}\sin(3x)\mathrm{d}x\right)$.
En notant $I = \displaystyle\int_0^\pi e^{4x}\sin(3x)\mathrm{d}x$, on obtient $I = \frac{1}{3}(e^{4\pi}+1) - \frac{16}{9}I$, d'où $\frac{25}{9}I = \frac{1}{3}(e^{4\pi}+1)$ i.e. $I = \frac{3}{25}(e^{4\pi}+1)$.

Exercice 2 [Enoncé]
On commence par essayer de se ramener à un numérateur constant et donc enlever le "x" en faisant apparaître de manière artificielle "$\frac{u'}{u}$".

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x - \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$$

Puis le dénominateur ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$, on essaye donc de se ramener à du "$\frac{u'}{u^2+1}$" en utilisant la forme canonique.

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+2x+5)\right]_{-1}^1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{(x+1)}{2}\right)^2+1}\mathrm{d}x$$

D'où

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\ln(8)-\ln(4)\right) - \frac{1}{2}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{(x+1)}{2}\right)\right]_{-1}^1 = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi}{8}$$

Exercice 3 [Enoncé]
La fonction Arctan est continue sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème fondamental de l'analyse, $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \operatorname{Arctan}(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de Arctan.
On va utiliser une IPP avec les deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ suivantes $u = \operatorname{Arctan}$ et $v : t \mapsto t$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = [t\operatorname{Arctan}(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = x\operatorname{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^x = x\operatorname{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,.$$

Exercice 4 [Enoncé]
À l'aide du changement de variable $\mathscr{C}^1$, $y = \operatorname{Arcsin}(x)$ (d'où $\mathrm{d}x = \cos(y)\mathrm{d}y$),

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}^{\operatorname{Arcsin}(x)}\mathrm{d}x = \int_{\operatorname{Arcsin}(0)}^{\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)} \mathbf{e}^y\cos(y)\mathrm{d}y = \operatorname{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathbf{e}^{(1+\mathbf{i})y}\mathrm{d}y\right) = \operatorname{Re}\left(\left[\frac{\mathbf{e}^{(1+\mathbf{i})y}}{1+\mathbf{i}}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}(1-\mathbf{i})\left(\mathbf{e}^{(1+\mathbf{i})\frac{\pi}{6}}-1\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{\frac{\pi}{6}}-1\right)\end{aligned}$$