Chapitre 7 : Fonctions usuelles

★ Manipuler les fonctions puissances.

Exercice 1 [Solution]
Comparer 2^{222} et 22^{22}.

★ Manipuler les fonctions exponentielles et logarithmes.

Exercice 2 [Solution]
Résoudre l'équation $(E) : 4^x 5^{\frac{1}{x}} = 50$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$.

★ Se ramener à des quotients lors de calculs de limites afin d'utiliser le théorème des croissances comparées.

Exercice 3 [Solution]
Déterminer, si elle existe, les limites de $f : x \mapsto \ln(x) - \mathbf{e}^x$ en $+\infty$ et en 0.

★ Manipuler les fonctions circulaires réciproques.

Exercice 4 [Solution]
On pose $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(2x^2 - 1)$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[-1, 1]$.
2. Pour tout $x \in [-1, 1]$, exprimer $f(x)$ en fonction de $\operatorname{Arccos}(x)$ via deux méthodes différentes.
3. Tracer la courbe représentative de f.

★ Manipuler les fonctions hyperboliques.

Exercice 5 [Solution]
Grand classique. Devoir maison sur les bijections réciproques des fonctions hyperboliques ch, sh et th.

Exercice 6 [Solution]
Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)| = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$$

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
On a $2^{222} > 22^{22} \iff 2^{111} > 22^{11} \iff 2^{100} > 11^{11} \iff 16^{25} > 11^{11}$. Donc $2^{222} > 22^{22}$.

Exercice 2 [Enoncé]
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$4^x 5^{\frac{1}{x}} = 50 \iff \mathbf{e}^{x\ln(4)+\frac{1}{x}\ln(5)} = 50 \iff x\ln(4) + \frac{1}{x}\ln(5) = \ln(50) \iff \ln(4)x^2 - \ln(50)x + \ln(5) = 0\,.$$

On se ramène donc à la résolution d'une équation de degré 2 de discriminant :

$$\Delta = \ln(50)^2 - 4\ln(4)\ln(5) = (\ln(2)+2\ln(5))^2 - 8\ln(2)\ln(5) = \ln(2)^2 - 4\ln(2)\ln(5) + 4\ln(5)^2 = (\ln(2)-2\ln(5))^2\,.$$

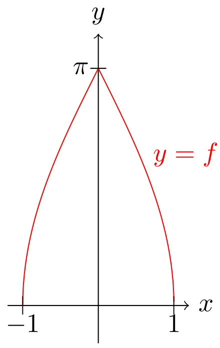
et admettant donc pour racines $x_1 = \frac{\ln(50)+\ln(2)-2\ln(5)}{2\ln(4)} = \frac{2\ln(2)}{4\ln(2)} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{\ln(50)-\ln(2)+2\ln(5)}{2\ln(4)} = \frac{4\ln(5)}{4\ln(2)} = \frac{\ln(5)}{\ln(2)}$.
Conclusion : $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{\ln(5)}{\ln(2)}\right\}$.

Exercice 3 [Enoncé] D'après les théorèmes généraux, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) - \mathbf{e}^x = -\infty$ (il n'y a pas de forme indéterminée ici).

Par ailleurs, $\ln(x) - \mathbf{e}^x = \mathbf{e}^x \left(\underbrace{\frac{\ln(x)}{\mathbf{e}^x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} - 1 \right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

Exercice 4 [Enoncé]
On pose $f : x \mapsto \text{Arccos}(2x^2-1)$ et $g : x \mapsto \sin(\text{Arctan}(x))$.

1. Par composée, la fonction f est définie et continue sur $\{x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 1 \in [-1,1]\} = \{x \in \mathbb{R}, 2x^2 \geqslant 0 \text{ et } 2x^2 \leqslant 2\}$ i.e. f est définie et continue sur $[-1,1]$.
2. <u>Première méthode :</u>
La fonction f est dérivable sur $\{x \in [-1,1], 2x^2-1 \in]-1,1[\} = \{x \in [-1,1], x^2 > 0 \text{ et } x^2 < 1\} =]-1,1[\setminus\{0\}$.
Pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$,
$$f'(x) = \frac{-4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{-x^4+x^2}} = \frac{-2\text{signe}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
On en déduit qu'il existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0,1[, f(x) = 2\,\text{Arccos}(x) + c_1$.
Par continuité de f et de Arccos, $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 2\,\text{Arccos}(x) + c_1$.
De même, il existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-1,0[, f(x) = -2\,\text{Arccos}(x) + c_2$.
Par continuité de f et de Arccos, $\forall x \in [-1,0]$, $f(x) = -2\,\text{Arccos}(x) + c_2$.
Or, en utilisant la première expression de f, $f(0) = \text{Arccos}(-1) = \pi$. D'où $2\,\text{Arccos}(0) + c_1 = \pi$ i.e. $c_1 = 0$.
De même, $-2\,\text{Arccos}(0) + c_2 = \pi$ i.e. $c_2 = 2\pi$.
D'où, pour $x \in [0,1]$, $f(x) = 2\,\text{Arccos}(x)$ et pour $x \in [-1,0[$, $f(x) = -2\,\text{Arccos}(x) + 2\pi$.
<u>Seconde méthode :</u>
Soit $x \in [-1,1]$, posons $\theta = \text{Arccos}(x)$ d'où $\cos(\theta) = x$.
D'où $f(x) = \text{Arccos}(2x^2-1) = \text{Arccos}(2\cos^2(\theta)-1) = \text{Arccos}(\cos(2\theta))$.
Attention : $\text{Arccos} \circ \cos = \text{id}$ uniquement sur $[0,\pi]$ et ici $2\theta \in [0,2\pi]$.
Or $2\theta \in [0,\pi] \iff \theta \in [0,\frac{\pi}{2}] \iff x \in [0,1]$. D'où, pour $x \in [0,1]$, $f(x) = 2\theta = 2\,\text{Arccos}(x)$.
Gérons à présent le cas où $x \in [-1,0[$. On a alors $\theta \in]\frac{\pi}{2},\pi]$ i.e. $2\theta \in]\pi,2\pi]$.
De plus, $\cos(2\theta) = \cos(-2\theta) = \cos(-2\theta+2\pi)$. L'intérêt de cette écriture réside dans l'appartenance de $-2\theta+2\pi$ dans $[0,\pi]$. On a alors $f(x) = \text{Arccos}(\cos(-2\theta+2\pi)) = -2\theta+2\pi = -2\,\text{Arccos}(x) + 2\pi$.
3.



Exercice 5 [Enoncé]
Voir la correction du devoir maison.

Exercice 6 [Enoncé]
Posons $f : x \mapsto |\text{Arctan}(\text{sh}\, x)| - \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)$. L'objectif est de montrer que f est nulle.
La fonction f est définie sur $\{x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\text{ch}(x)} \in [-1, 1]\} = \mathbb{R}$.
De plus, on remarque que f est paire, on va donc restreindre l'étude sur $\mathbb{R}_+$.
Par composée et combinaison linéaire, f est dérivable sur $\{x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\text{ch}(x)} \in]-1, 1[\} = \mathbb{R}^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{1 + \text{sh}^2(x)} - \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{ch}^2(x)}}} = \frac{1}{\text{ch}(x)} - \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} \times \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} = 0\,.$$

Donc f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$. D'où f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f(0) = 0 - 0 = 0$.
On conclut sur la nullité de f grâce à sa parité. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\text{Arctan}(\text{sh}\, x)| = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)$.