Chapitre 6 : Fonctions de la variable réelle

★ Restreindre le domaine d'étude d'une fonction en utilisant des arguments de parité et de périodicité.

Exercice 1 [Solution]
Soit $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $f : x \mapsto A\cos(\omega x)$ et $g : x \mapsto A\cos(\omega x + \varphi)$.

1. Étudier la parité et la périodicité de la fonction f puis indiquer l'intervalle sur lequel il suffit d'étudier f.
2. Dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle puis tracer une représentation de la courbe de f.
3. Tracer également une représentation de la courbe de g en remarquant que $g(x) = f\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

★ Démontrer des inégalités en prenant l'initiative d'introduire des fonctions adéquates.

Exercice 2 [Solution]
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

★ Montrer qu'une fonction est bijective en utilisant le théorème de la bijection.

★ Déterminer par équivalence la bijection réciproque d'une fonction.

★ Déterminer la dérivabilité et la dérivée d'une bijection réciproque.

Exercice 3 [Solution]
Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que f réalise une bijection.
3. Déterminer une expression explicite de f^{-1}.
4. Étudier la dérivabilité et la dérivée de f^{-1} de deux manières différentes.

★ Tracer de manière plus précise la courbe représentative d'une fonction à l'aide des branches infinies.

Exercice 4 [Solution]
On considère la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) + \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}$.

1. (a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   (b) En posant $u = \frac{2}{x}$, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = 2$. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{2}\right)\right) = 0$.
   Qu'en déduit-on pour la courbe représentative de f ?
   (c) Déterminer l'existence et la valeur de la limite de f en 0.
2. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et déterminer f'.
   (b) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $g(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$.
   Étudier les variations de g en précisant les limites en $+\infty$ et 0.
   (c) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) > 0$. En déduire les variations de f.
   (d) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative le plus précisément possible.

★ Utiliser la formule de Leibniz pour calculer des dérivées successives.

Exercice 5 [Solution]
Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et déterminer ses dérivées successives.

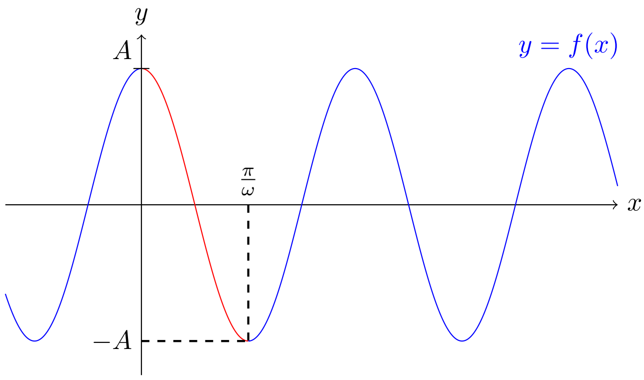
Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
Soit $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $f : x \mapsto A\cos(\omega x)$ et $g : x \mapsto A\cos(\omega x + \varphi)$.

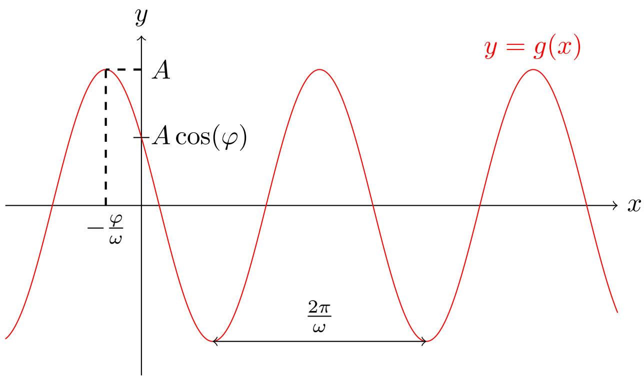
1. Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(-\omega x) = \cos(\omega x) = f(x)$ et $f(x + \frac{2\pi}{\omega}) = \cos(\omega x + 2\pi) = \cos(\omega x) = f(x)$.
   Donc f est paire et $\frac{2\pi}{\omega}$ périodique. Il suffit alors d'étudier f sur $[0, \frac{\pi}{\omega}]$.
2. On dresser le tableau de variations de f :

x	0	$\frac{\pi}{\omega}$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	A $\searrow$	$-A$

   Il ne nous reste plus qu'à tracer la courbe représentative sur $[0, \frac{\pi}{\omega}]$, puis utiliser une symétrie par rapport à l'axe des abscisses et enfin répéter le motif de longueur $\frac{2\pi}{\omega}$.



3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$. La courbe de g se déduit de celle de f par translation du vecteur $-\frac{\varphi}{\omega}\overrightarrow{i}$.



Exercice 2 [Enoncé]
Considérons $f : x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$ et $g : x \mapsto x - \sin(x)$. Montrons que ces fonctions sont positives sur $\mathbb{R}_+$.
Par combinaison linéaire, elles sont infiniment dérivable. Étudions tout d'abord le signe de g.
Nous avons $g' : x \mapsto -\cos(x)$ donc g' est positive d'où g est croissante.
De plus $g(0) = 0$, donc g est positive sur $\mathbb{R}_+$.
Par ailleurs, $f' : x \mapsto \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$ et $f'' : -\sin(x) + x$ d'où $f'' = g$ est positive sur $\mathbb{R}_+$.
Par conséquent, f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f'(0) = 0$ donc f' est positive sur $\mathbb{R}_+$.
On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $f(0) = 0$, f est positive sur $\mathbb{R}_+$.
Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

Exercice 3 [Enoncé]

Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Posons $g : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$. Par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, g est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et
$$g'(x) = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} > 0$$
On en déduit le tableau de variation de g.

x	$-\infty$	-1	1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$ 0	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-1

Comme ln est définie uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée, $f = \ln \circ g$ est définie sur $]-1,1[$.
De plus ln et g sont croissantes donc par composée f est croissante.

x	-1		1
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction f est continue et strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, f est réalise une bijection de $]-1,1[$ à valeurs dans $\left]\lim_{x\to -1} f(x), \lim_{x\to 1} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
3. Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $x \in]-1,1[$.
$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x) \iff y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \iff \frac{1+x}{1-x} = \mathbf{e}^y \iff 1+x = \mathbf{e}^y - x\mathbf{e}^y \iff x = \frac{\mathbf{e}^y - 1}{\mathbf{e}^y + 1}.$$
D'où $f^{-1}(y) = \frac{\mathbf{e}^y - 1}{\mathbf{e}^y + 1}$.
4. Première méthode :
La fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ car quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$(f^{-1})'(y) = \frac{\mathbf{e}^y(\mathbf{e}^y+1) - (\mathbf{e}^y - 1)\mathbf{e}^y}{(\mathbf{e}^y+1)^2} = \frac{2\mathbf{e}^y}{(\mathbf{e}^y+1)^2}.$$
Seconde méthode :
La fonction $f = \ln \circ g$ est dérivable sur $]-1,1[$ par composée de fonctions dérivables.
De plus, pour tout $x \in]-1,1[$,
$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2}{(1-x)^2}\frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$$
La fonction f' ne s'annule pas, donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1-(\frac{\mathbf{e}^y-1}{\mathbf{e}^y+1})^2}{2} = \frac{2\times 2\mathbf{e}^y}{2(\mathbf{e}^y+1)^2} = \frac{2\mathbf{e}^y}{(\mathbf{e}^y+1)^2}.$$

Exercice 4 [Enoncé]

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x\left(\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)\right) + \frac{1}{2} = x\left(\frac{1}{4} + \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right) + \frac{1}{2}$, puis en procédant par opérations élémentaires sur les limites, nous en déduisons le résultat.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En posant $u = \frac{2}{x}$, l'expression $x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \frac{2}{u}\ln(1+u) = 2\frac{\ln(1+u)}{u}$.
   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ (limite obtenue par taux d'accroissement) donc $\lim\limits_{u \to 0} 2\frac{\ln(1+u)}{u} = 2$ i.e. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$.
   Par ailleurs, $f(x) - \frac{x}{4} = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{1}{2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{5}{2}$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \left(\frac{x}{4} - \frac{5}{2}\right) = 0$. Cela entraîne que la courbe représentative de f admet la droite d'équation : $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$ comme asymptote oblique.

   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln(x+2) - x\ln(x) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$, d'où, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

2. (a) Par opérations usuelles sur les fonctions dérivables, f est dérivable sur son domaine de définition et nous avons :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + x\frac{x-(x+2)}{x^2} \times \frac{x}{x+2} + \frac{1}{4} = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$.

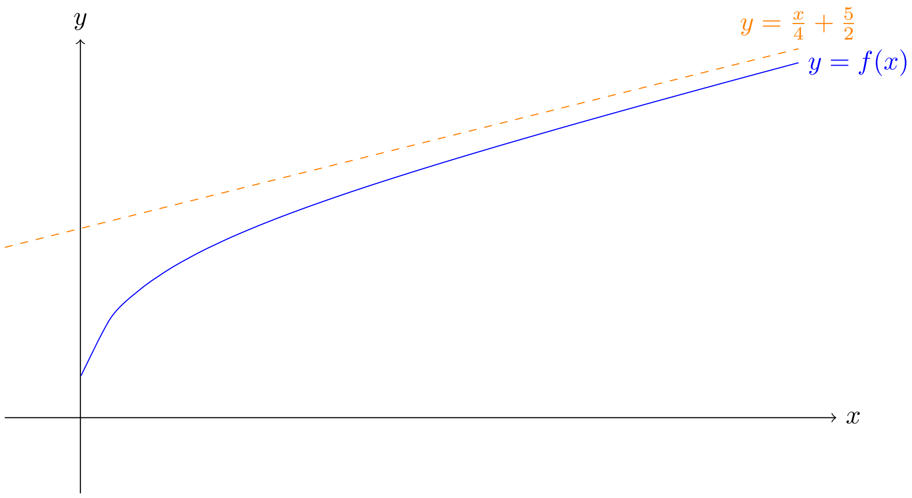
   (b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations usuelles sur les fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $g'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{x(x+2) - (x+2)^2 + 2x}{x(x+2)^2} = \frac{-4}{x(x+2)^2}$.
   Cette dernière expression est strictement négative donc g est strictement décroissante. De plus, par opérations usuelles, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$.

   (c) Puisque g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet une limite strictement positive en $+\infty$, alors g est positive. Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = g(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) > 0$, ce qui prouve que f est strictement croissante.

   (d) Les éléments précédents nous permettent de dresser le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ $\nearrow$	$+\infty$

   Il ne nous reste plus qu'à tracer la courbe représentative en précisant l'asymptote oblique :



Exercice 5 [Enoncé]

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{2x}}{1+x}$ est le produit de $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $h : x \mapsto \mathbf{e}^{2x}$ qui sont deux fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc f l'est également. De plus, d'après la formule de Leibniz, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$ et $h^{(k)} : x \mapsto 2^k \mathbf{e}^{2x}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} 2^{n-k} \mathbf{e}^{2x} = n! 2^n \mathbf{e}^{2x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n-k)! 2^k (1+x)^{k+1}}$$