# Chapitre 5 : Ensembles de nombres

★ Majorer et/ou minorer des sommes, des produits et des quotients.

**Exercice 1** [Solution]

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 3$.

★ Utiliser les encadrements liés à la partie entière.

**Exercice 2** [Solution]
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$.

★ Résoudre une (in)équation comportant des valeurs absolues.

**Exercice 3** [Solution]
Résoudre l'équation $(E)$ : $|2x+1| \leqslant |x+2|$ d'inconnue réelle $x$.

★ Déterminer une borne inf/supérieure.

**Exercice 4** [Solution]
Soit $A$ et $B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. On suppose de plus que $A \cap B \neq \emptyset$.
   Montrer que $A \cap B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$.
3. Exhiber un exemple pour lequel la dernière inégalité est stricte.

★ Déterminer le reste et/ou le quotient d'une division euclidienne.

**Exercice 5** [Solution]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste et le quotient dans la division euclidienne par $n$ de la somme des $n$ premiers entiers strictement positifs.

★ Calculer un PGCD en utilisant la relation $a \wedge b = b \wedge (a - bq)$.

**Exercice 6** [Solution]
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. Montrer que $n+1 \Big| (2n+1)\binom{2n}{n}$.

Le lemme de Gauss [1] permet alors de montrer que $n+1 \Big| \binom{2n}{n}$.

★ Calculer un PGCD ou un PPCM en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

**Exercice 7** [Solution]
Trouver tous les couples $(a, b)$ de $\mathbb{N}^2$ tels que $a \wedge b = 153$ et $a \vee b = 42075$.

1. Pour des entiers $a$, $b$ et $c$, si $a$ et $b$ sont premiers entre eux et $a \mid bc$, alors $a \mid c$.

## Correction des exercices

**Exercice 1** [Enoncé]
On montre aisément par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k! \geqslant 2^{k-1}$.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2\underbrace{\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)}_{\leqslant 1} \leqslant 3$.

**Exercice 2** [Enoncé]
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x$, puis par croissance de la fonction racine $\sqrt{\lfloor x \rfloor} \leqslant \sqrt{x}$ et enfin par croissance de la fonction partie entière, $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor \leqslant \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.
Par ailleurs, $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leqslant \sqrt{x}$, puis par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ : $\lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \leqslant x$ et enfin par croissance de la fonction partie entière : $\lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \leqslant \lfloor x \rfloor$. On utilise à nouveau la croissance des fonctions racines et parties entières afin d'obtenir $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leqslant \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$.
Conclusion : $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$.

**Exercice 3** [Enoncé]
Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche à faire une distinction de cas selon le signe de $2x+1$ et celui de $x+2$.
On a $2x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}$ et $x+2 \geqslant 0 \iff x \geqslant -2$.
Premier cas : $x < -2$.
On a $|2x+1| \leqslant |x+2| \iff -2x-1 \leqslant -x-2 \iff x \geqslant 1$. Donc il n'y a pas de solution de $(E)$ sur $]-\infty, -2[$.
Deuxième cas : $-2 \leqslant x < -\frac{1}{2}$.
On a $|2x+1| \leqslant |x+2| \iff -2x-1 \leqslant x+2 \iff x \geqslant -1$.
Donc l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $[-2, -\frac{1}{2}[$ est $[-1, -\frac{1}{2}[$.
Troisième cas : $x \geqslant -\frac{1}{2}$.
On a $|2x+1| \leqslant |x+2| \iff 2x+1 \leqslant x+2 \iff x \leqslant 1$.
Donc l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ est $[-\frac{1}{2}, 1]$.
Conclusion : l'ensemble des solutions de $(E)$ est $[-1, 1]$.

**Exercice 4** [Enoncé]
Soit $A$ et $B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Soit $x \in A \cup B$.
   Si $x \in A$ alors $x \leqslant \sup(A) \leqslant \max(\sup(A), \sup(B))$ et si $x \in B$ alors $x \leqslant \sup(B) \leqslant \max(\sup(A), \sup(B))$.
   L'ensemble $A \cup B$ est alors non vide et majoré par $\max(\sup(A), \sup(B))$. Par conséquent, $A \cup B$ admet une borne supérieure et $\sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup(A), \sup(B))$. Il reste à montrer que $\sup(A \cup B) \geqslant \max(\sup(A), \sup(B))$.
   Soit $M$ un majorant de $A \cup B$. Alors $M$ est un majorant de $A$ (et aussi de $B$). Comme $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de $A$, on a $M \geqslant \sup(A)$. De même, $M \geqslant \sup(B)$, ainsi $M \geqslant \max(\sup(A), \sup(B))$.
   Comme $\sup(A \cup B)$ est un majorant de $A \cup B$, on a $\sup(A \cup B) \geqslant \max(\sup(A), \sup(B))$.
   Conclusion : $A \cup B$ admet une borne supérieure et $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. On suppose de plus que $A \cap B \neq \emptyset$.
   L'ensemble $A \cap B$ est alors non vide et majoré par $\sup(A)$ et par $\sup(B)$.
   Par conséquent, $A \cap B$ admet une borne supérieure et $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$.
3. Considérons $A = \{1; 2\}$ et $B = \{1; 3\}$. On a $\sup(A) = 2$, $\sup(B) = 3$ et $\sup(A \cap B) = 1$.
   D'où $\sup(A \cap B) < \min(\sup(A), \sup(B))$.

**Exercice 5** [Enoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme des $n$ premiers entiers strictement positifs est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(q, r)$ d'entiers tels que $\frac{n(n+1)}{2} = qn + r$ et $0 \leqslant r < n$.
Si $n$ est impair, alors $n+1$ est pair d'où $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\frac{n(n+1)}{2} = n \times \frac{n+1}{2} + 0$.
Par unicité, $q = \frac{n+1}{2}$ et $r = 0$.
Si $n$ est pair, alors $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\frac{n(n+1)}{2} = n \times \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$ et $0 \leqslant \frac{n}{2} < n$. Par unicité, $q = r = \frac{n}{2}$.

**Exercice 6** [Enoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On a $(2n+1) \wedge (n+1) = (n+1) \wedge (2n+1-(n+1)) = (n+1) \wedge n = n \wedge 1 = 1$.
   Donc $2n+1$ et $n+1$ sont premiers entre eux.
2. On a $\frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} = \binom{2n+1}{n+1} \in \mathbb{N}$. D'où $n+1 \,\Big|\, (2n+1)\binom{2n}{n}$.

**Exercice 7** [Enoncé]
On a $153 = 3^2 \times 17$ et $42075 = 3^2 \times 5^2 \times 11 \times 17$.
Donc $a = 3^{a_3} \times 5^{a_5} \times 11^{a_{11}} \times 17^{a_{17}}$ et $b = 3^{b_3} \times 5^{b_5} \times 11^{b_{11}} \times 17^{b_{17}}$ tels que :
$a_3 = b_3 = 2$
$(a_5, b_5) = (0, 2)$ ou $(a_5, b_5) = (2, 0)$
$(a_{11}, b_{11}) = (0, 1)$ ou $(a_{11}, b_{11}) = (1, 0)$
$a_{17} = b_{17} = 1$
Donc les couples $(a, b)$ de $\mathbb{N}^2$ tels que $a \wedge b = 153$ et $a \vee b = 146975$ sont :

$$(153, 42075); (3825, 1683); (1683, 3825) \text{ et } (42075, 153)$$