Chapitre 5 : Ensembles de nombres

★ Majorer et/ou minorer des sommes, des produits et des quotients.

Exercice 1 [Solution]

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 3$.

★ Utiliser les encadrements liés à la partie entière.

Exercice 2 [Solution]

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$.

★ Résoudre une (in)équation comportant des valeurs absolues.

Exercice 3 [Solution]

Résoudre l'équation (E) : $|2x + 1| \leq |x + 2|$ d'inconnue réelle x .

★ Déterminer une borne inf/supérieure.

Exercice 4 [Solution]

Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. On suppose de plus que $A \cap B \neq \emptyset$.
Montrer que $A \cap B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$.
3. Exhiber un exemple pour lequel la dernière inégalité est stricte.

★ Déterminer le reste et/ou le quotient d'une division euclidienne.

Exercice 5 [Solution]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste et le quotient dans la division euclidienne par n de la somme des n premiers entiers strictement positifs.

★ Calculer un PGCD en utilisant la relation $a \wedge b = b \wedge (a - bq)$.

Exercice 6 [Solution]

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $n + 1$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
2. Montrer que $n + 1 \mid (2n + 1) \binom{2n}{n}$.

Le lemme de Gauss¹ permet alors de montrer que $n + 1 \mid \binom{2n}{n}$.

★ Calculer un PGCD ou un PPCM en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

Exercice 7 [Solution]

Trouver tous les couples (a, b) de $\mathbb{N}^2$ tels que $a \wedge b = 153$ et $a \vee b = 42075$.

★ Utiliser la décomposition en facteurs premiers pour montrer une relation de divisibilité.

Exercice 8 [Solution]

Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i = \{(2i + 1)2^k, k \in \mathbb{N}\}$.

1. Justifier que la famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forme une partition de $\mathbb{N}^*$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute partie de $n + 1$ éléments de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ contient une paire $\{p, q\}$ d'éléments distincts telle que p divise q .

1. Pour des entiers a, b et c , si a et b sont premiers entre eux et $a \mid bc$, alors $a \mid c$.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]

On montre aisément par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k! \geq 2^{k-1}$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \underbrace{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}_{\leq 1} \leq 3$.

Exercice 2 [Enoncé]

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $\lfloor x \rfloor \leq x$, puis par croissance de la fonction racine $\sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq \sqrt{x}$ et enfin par croissance de la fonction partie entière, $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

Par ailleurs, $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \sqrt{x}$, puis par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$: $\lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \leq x$ et enfin par croissance de la fonction partie entière : $\lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \leq \lfloor x \rfloor$. On utilise à nouveau la croissance des fonctions racines et parties entières afin d'obtenir $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$.

Conclusion : $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$.

Exercice 3 [Enoncé]

Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche à faire une distinction de cas selon le signe de $2x + 1$ et celui de $x + 2$.

On a $2x + 1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$ et $x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2$.

Premier cas : $x < -2$.

On a $|2x + 1| \leq |x + 2| \iff -2x - 1 \leq -x - 2 \iff x \geq 1$. Donc il n'y a pas de solution de (E) sur $] -\infty, -2[$.

Deuxième cas : $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$.

On a $|2x + 1| \leq |x + 2| \iff -2x - 1 \leq x + 2 \iff x \geq -1$.

Donc l'ensemble des solutions de (E) sur $[-2, -\frac{1}{2}[$ est $[-1, -\frac{1}{2}[$.

Troisième cas : $x \geq -\frac{1}{2}$.

On a $|2x + 1| \leq |x + 2| \iff 2x + 1 \leq x + 2 \iff x \leq 1$.

Donc l'ensemble des solutions de (E) sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ est $[-\frac{1}{2}, 1]$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est $[-1, 1]$.

Exercice 4 [Enoncé]

Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Soit $x \in A \cup B$.

Si $x \in A$ alors $x \leq \sup(A) \leq \max(\sup(A), \sup(B))$ et si $x \in B$ alors $x \leq \sup(B) \leq \max(\sup(A), \sup(B))$.

L'ensemble $A \cup B$ est alors non vide et majoré par $\max(\sup(A), \sup(B))$. Par conséquent, $A \cup B$ admet une borne supérieure et $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup(A), \sup(B))$. Il reste à montrer que $\sup(A \cup B) \geq \max(\sup(A), \sup(B))$.

Soit M un majorant de $A \cup B$. Alors M est un majorant de A (et aussi de B). Comme $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A , on a $M \geq \sup(A)$. De même, $M \geq \sup(B)$, ainsi $M \geq \max(\sup(A), \sup(B))$.

Comme $\sup(A \cup B)$ est un majorant de $A \cup B$, on a $\sup(A \cup B) \geq \max(\sup(A), \sup(B))$.

Conclusion : $A \cup B$ admet une borne supérieure et $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

2. On suppose de plus que $A \cap B \neq \emptyset$.

L'ensemble $A \cap B$ est alors non vide et majoré par $\sup(A)$ et par $\sup(B)$.

Par conséquent, $A \cap B$ admet une borne supérieure et $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$.

3. Considérons $A = \{1; 2\}$ et $B = \{1; 3\}$. On a $\sup(A) = 2$, $\sup(B) = 3$ et $\sup(A \cap B) = 1$.

D'où $\sup(A \cap B) < \min(\sup(A), \sup(B))$.

Exercice 5 [Enoncé]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme des n premiers entiers strictement positifs est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (q, r) d'entiers tels que $\frac{n(n+1)}{2} = qn + r$ et $0 \leq r < n$.

Si n est impair, alors $n + 1$ est pair d'où $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\frac{n(n+1)}{2} = n \times \frac{n+1}{2} + 0$.

Par unicité, $q = \frac{n+1}{2}$ et $r = 0$.

Si n est pair, alors $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\frac{n(n+1)}{2} = n \times \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$ et $0 \leq \frac{n}{2} < n$. Par unicité, $q = r = \frac{n}{2}$.

Exercice 6 [Enoncé]

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On a $(2n + 1) \wedge (n + 1) = (n + 1) \wedge (2n + 1 - (n + 1)) = (n + 1) \wedge n = n \wedge 1 = 1$.

Donc $2n + 1$ et $n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On a $\frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} = \binom{2n+1}{n+1} \in \mathbb{N}$. D'où $n + 1 \mid (2n + 1)\binom{2n}{n}$.

Exercice 7 [Enoncé]

On a $153 = 3^2 \times 17$ et $42075 = 3^2 \times 5^2 \times 11 \times 17$.

Donc $a = 3^{a_3} \times 5^{a_5} \times 11^{a_{11}} \times 17^{a_{17}}$ et $b = 3^{b_3} \times 5^{b_5} \times 11^{b_{11}} \times 17^{b_{17}}$ tels que :

$$a_3 = b_3 = 2 \quad (a_5, b_5) = (0, 2) \text{ ou } (a_5, b_5) = (2, 0) \quad (a_{11}, b_{11}) = (0, 1) \text{ ou } (a_{11}, b_{11}) = (1, 0) \quad a_{17} = b_{17} = 1$$

Donc les couples (a, b) de $\mathbb{N}^2$ tels que $a \wedge b = 153$ et $a \vee b = 146975$ sont :

$$(153, 42075); (3825, 1683); (1683, 3825) \text{ et } (42075, 153)$$

Exercice 8 [Enoncé]

Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i = \{(2i + 1)2^k, k \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrons que la famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forme une partition de $\mathbb{N}^*$.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \subset \mathbb{N}^*$ et $2i + 1 \in A_i$ donc $A_i \neq \emptyset$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après l'existence de la décomposition en facteurs premiers, $\exists i \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = (2i + 1)2^k$.
D'où $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}^*$.
- Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ d'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

Par conséquent, la famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forme une partition de $\mathbb{N}^*$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit B une partie de $n + 1$ éléments de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$.

$$\text{On a } B = B \cap \mathbb{N}^* = B \cap \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (B \cap A_i).$$

On remarque que si $i \in \llbracket n, +\infty \llbracket$, $A_i \subset \llbracket 2n + 1, +\infty \llbracket$ d'où $B \cap A_i = \emptyset$.

$$\text{D'où } B = \bigcup_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} (B \cap A_i) \text{ est l'union de } n \text{ parties de } \mathbb{N}^*.$$

La partie B étant composée de $n + 1$ éléments, il existe $i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ tels que $B \cap A_i$ contient au moins deux éléments distincts. Or, pour tout $x, y \in A_i$, $x|y$ ou $y|x$, donc $B \cap A_i$ (et par conséquent B) contient une paire $\{p, q\}$ d'éléments distincts telle que p divise q .