Chapitre 4 : Calcul algébrique

★ Faire apparaître une somme ou un produit télescopique.

Exercice 1 [Solution]

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

★ Utiliser le binôme de Newton en trigonométrie.

Exercice 2 [Solution]
Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \cos^6(x)$.

Exercice 3 [Solution] Le but de cet exercice est déterminer une expression explicite de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1. Exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $(E) : 16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$.
3. Résoudre (E).
4. Conclure.

Exercice 4 [Solution]

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.

★ Calculer une somme triangulaire.

Exercice 5 [Solution]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=k}^{n} \frac{k^2}{p}$.

Exercice 6 [Solution]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{i}$.

★ Utiliser un décalage d'indice.

Exercice 7 [Solution]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\displaystyle\prod_{k=2n+1}^{3n} \frac{k-n}{k-2n}$ à l'aide d'un coefficient binomial.

★ Résoudre un système avec paramètre à l'aide du pivot de Gauss.

Exercice 8 [Solution]
Résoudre les systèmes linéaires suivants, d'inconnues réelles x, y, z, où m est un paramètre réel.

(a) $\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ mx - 2y + mz = 2 \\ x - my + 2z = 1 \end{cases}$

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}=\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right)=\frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}$.

Exercice 2 [Enoncé]
Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos^6(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^6=\frac{1}{2^6}\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}+6\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+15\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+20+15\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+6\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\right)$.
D'où $\cos^6(x)=\frac{1}{2^5}\left(\cos(6x)+6\cos(4x)+15\cos(2x)+10\right)$.
Par conséquent, $F : x \mapsto \frac{1}{2^6\times 3}\sin(6x)+\frac{3}{2^6}\sin(4x)+\frac{15}{2^6}\sin(2x)+\frac{5}{2^4}x$ est une primitive de $f : x \mapsto \cos^6(x)$.

Exercice 3 [Enoncé]

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sin(5x)=\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}\right)=\mathrm{Im}\left((\cos(x)+\mathbf{i}\sin(x))^5\right)=5\cos^4(x)\sin(x)-10\cos^2(x)\sin^3(x)+\sin^5(x)$.
   D'où $\sin(5x)=5(1-\sin^2(x))^2\sin(x)-10(1-\sin^2(x))\sin^3(x)+\sin^5(x)=16\sin^5(x)-20\sin^3(x)+5\sin(x)$.
2. Par conséquent, $16\sin^5\left(\frac{\pi}{5}\right)-20\sin^3\left(\frac{\pi}{5}\right)+5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sin(\pi)=0$.
   Donc $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $(E) : 16x^5-20x^3+5x=0$
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y=x^2$. On a $16x^5-20x^3+5x=0 \iff x=0$ ou $16y^2-20y+5=0$.
   Or $16y^2-20y+5=0 \iff y=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8} \iff x=\pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}}$.
   Donc l'ensemble des solutions de (E) est $S=\left\{-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}};-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}};0;\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}};\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right\}$.
4. On a montré que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\in S$. De plus, $0<\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)<\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 4 [Enoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)=\mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1\right)^n\right)=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)^n\right)=2^n\cos^n\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{n\theta}{2}\right)$$

Exercice 5 [Enoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=k}^{n}\frac{k^2}{p}=\sum_{1\leqslant k\leqslant p\leqslant n}\frac{k^2}{p}=\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}k^2\right)=\sum_{p=1}^{n}\frac{(p+1)(2p+1)}{6}=\frac{1}{6}\left(2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\frac{n(n+1)}{2}+n\right).$$

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=k}^{n}\frac{k^2}{p}=\frac{n}{36}\left(4n^2+15n+17\right)$.

Exercice 6 [Enoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{i}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}=\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}=\sum_{j=0}^{n}2^j=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=2^{n+1}-1$$

.

Exercice 7 [Enoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du décalage d'indice $j=k-n$, $\displaystyle\prod_{k=2n+1}^{3n}k-n=\prod_{j=n+1}^{2n}j=\frac{(2n)!}{n!}$.

De plus, à l'aide du décalage d'indice $j=k-2n$, $\displaystyle\prod_{k=2n+1}^{3n}(k-2n)=\prod_{j=1}^{n}j=n!$.

D'où

$$\prod_{k=2n+1}^{3n}\frac{k-n}{k-2n}=\frac{(2n)!}{n!n!}=\binom{2n}{n}.$$

Exercice 8 [Enoncé] Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a)

$$\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \underset{\forall i\in\{2,3\}, L_i\leftarrow L_i-L_1}{\iff} \begin{cases} x+y+mz=m \\ (m-1)y-(m+1)z=1-m \\ -(m+1)z=1-m \end{cases}$$

Premier cas : $m=-1$. Le système n'admet pas de solution.
Considérons à présent que $m \neq -1$.

$$\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+mz=m \\ (m-1)y=0 \\ z=\frac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

Deuxième cas : $m=1$.

$$\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=m-\frac{m-1}{m+1} \\ 0=0 \\ z=\frac{m-1}{m+1} \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=\frac{m^2+1}{m+1} \\ z=\frac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{\left(\frac{m^2+1}{m+1}-y, y, \frac{m-1}{m+1}\right), y \in \mathbb{R}\right\}$.
Considérons à présent que $m \notin \{-1; 1\}$.

$$\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{m^2+1}{m+1} \\ y=0 \\ z=\frac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

Le système admet une unique solution qui est $\left(\frac{m^2+1}{m+1}, 0, \frac{m-1}{m+1}\right)$.

(b)

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ mx-2y+mz=2 \\ x-my+2z=1 \end{cases} \underset{L_2\to L_2-mL_1}{\iff} \begin{cases} x-y+z=1 \\ (m-2)y=2-m \\ x-my+2z=1 \end{cases}$$

$$\underset{L_3\to L_3-mL_1}{\iff} \begin{cases} x-y+z=1 \\ (m-2)y=2-m \\ (1-m)y+z=0 \end{cases}$$

Premier cas : $m=2$.

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ mx-2y+mz=2 \\ x-my+2z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{(1, z, z), z \in \mathbb{R}\}$.
Deuxième cas : $m \neq 2$.

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ mx-2y+mz=2 \\ x-my+2z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1+m \\ y=-1 \\ z=1-m \end{cases}$$

Le système admet une unique solution qui est $(m-1, -1, 1-m)$.