Chapitre 3 : Ensembles et applications

★ Montrer une égalité d'ensemble par double inclusion.

Exercice 1 [Solution]
Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t+1, 4t+3);\ t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = B$.

★ Manipuler les parties d'un ensemble.

Exercice 2 [Solution]
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Monter que :

(a) $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$;
(b) $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.

★ Montrer qu'une application est in/sur/bijective.

Exercice 3 [Solution]
Soit E un ensemble. Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

★ Déterminer une image directe ou une image réciproque.

Exercice 4 [Solution]
Soit E et F des ensembles. Soit $f : E \to F$. Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(F)$. Montrer que :

(a) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
(b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
(c) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
(d) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Exhiber un contre-exemple afin de montrer que cette inclusion peut être stricte.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
On raisonne par double inclusion.
$\boxed{\subset}$ Soit $a \in A$. Il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a = (x, y)$ et $4x - y = 1$.
Posons $t = x - 1$. On a $x = t + 1$ et $y = 4x - 1 = 4t + 4 - 1 = 4t + 3$.
D'où $a = (t + 1, 4t + 3) \in B$.
$\boxed{\supset}$ Soit $b \in B$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $b = (t + 1, 4t + 3)$.
On remarque que $4(t + 1) - (4t + 3) = 1$ donc $b \in A$.
Conclusion : $A = B$.

Exercice 2 [Enoncé]
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

(a) Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $A \cup B = A \cap C$.
On a $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A$. De plus, $A \subset A \cup B \subset A \cap C \subset C$.
D'où $B \subset A \subset C$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $B \subset A \subset C$.
Par conséquent, $A \cup B = A$ et $A \cap C = A$, d'où $A \cup B = A \cap C$.

Par conséquent : $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$.

(b) Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $A \cap B = A \cap C$.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in A \cap \overline{B}$. Donc $x \in A$.
Par l'absurde, supposons que $x \in C$. Donc, $x \in A \cap C = A \cap B$.
D'où $x \in B$ ce qui est absurde car $x \in \overline{B}$. D'où $x \in \overline{C}$.
Par conséquent, $x \in A \cap \overline{C}$.

$\boxed{\supset}$ Analogue à l'inclusion allée par symétrie des rôles de B et C.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$. D'après l'implication allée, $A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap \overline{\overline{C}}$ i.e. $A \cap B = A \cap C$.

Par conséquent : $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.

Exercice 3 [Enoncé]
Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f est injective. Montrons que f est surjective.
Soit $y \in E$.
Posons $x = f(y)$. En composant par f deux fois, $f(f(x)) = f(f(f(y)))$. Or $f(f(f(y))) = f(y)$.
D'où $f(f(x)) = f(y)$, puis par injectivité de f, $f(x) = y$. D'où f est surjective.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que f est surjective. Montrons que f est injective.
Soit $x_1, x_2 \in E$. Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$.
Par surjectivité de f, il existe $z_1, z_2 \in E$ tel que $f(z_1) = x_1$ et $f(z_2) = x_2$. D'où $f(f(z_1)) = f(f(z_2))$.
On compose par f, $f(f(f(z_1))) = f(f(f(z_2))$ i.e. $f(z_1) = f(z_2)$ i.e. $x_1 = x_2$. D'où f est injective.

Exercice 4 [Enoncé]
Soit E et F des ensembles. Soit $f : E \to F$. Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(F)$.

(a) Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\iff f(x) \in B_1 \text{ et } f(x) \in B_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \text{ et } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(b) Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\iff f(x) \in B_1 \text{ ou } f(x) \in B_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \text{ ou } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(c) Montrons par double inclusion que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$.
Premier cas : Si $x \in A_1$, $y \in f(A_1) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.
Second cas : Si $x \in A_2$, $y \in f(A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.
Donc, dans tous les cas, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

$\boxed{\supset}$ On a $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ et $A_2 \subset A_1 \cup A_2$. D'où $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$ et $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$.
Par conséquent, $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$.

(d) Montrons que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Il existe $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$.
On a $x \in A_1$ donc $y \in f(A_1)$ et $x \in A_2$ donc $y \in f(A_2)$.
Par conséquent, $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

Pour $E = F = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$, $A_1 = \{1\}$ et $A_2 = \{-1\}$.
$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$ et $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$.