Chapitre 26 : Variables aléatoires

★ Déterminer la loi, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire.

Exercice 1 [Solution]
On dispose d'une urne composée de deux boules blanches et de N boules noires où $N \in \mathbb{N}^*$. On tire, successivement et sans remise, toutes les boules de l'urne. Notons X le rang d'apparition de la première boule blanche.
Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

★ Calculer une probabilité d'un évènement en passant par le calcul d'une espérance.

Exercice 2 [Solution]
On lance de deux dés équilibrés, le premier est composé de 12 faces alors que le second en possède 20.
Quelle est la probabilité que le double du résultat du premier dé soit plus grand que le résultat du second ?

★ Reconnaître une loi uniforme, de Bernoulli ou binomiale dans un exercice pratique qui requiert une modélisation.

★ Retrouver les lois marginales d'un couple de variables aléatoires à partir de la loi conjointe.

★ Étudier l'indépendance et la corrélation de deux variables aléatoires.

Exercice 3 [Solution]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
On remplit une urne avec n boules de la façon suivante : pour chaque boule, on lance une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est égale à p ; on met dans l'urne une boule blanche si la pièce donne pile, une boule rouge si elle donne face.

1. On désigne par X le nombre de boules blanches présentes dans l'urne une fois qu'on a fini de la remplir. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.
2. Soit k un entier compris entre 1 et n. On extrait de l'urne une poignée de k boules prises au hasard, et on note Y la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches de cette poignée.
   (a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
   (b) En déduire la loi de Y. Reconnaît-on une loi usuelle ?
   (c) Étudier l'indépendance des variables aléatoires X et Y.
   (d) Calculer $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

★ Déterminer la variance d'une somme à l'aide de la covariance (ou inversement).

Exercice 4 [Solution]
Une urne contient N boules qui sont blanches, rouges ou noires. On note p_B et p_R les proportions respectives de boules blanches et rouges. On extrait successivement et avec remise n boules dans cette urne.
Soient B et R les variables aléatoires égales respectivement au nombre de boules blanches et rouges obtenues.

1. Déterminer $\mathrm{V}(B)$, $\mathrm{V}(R)$ et $\mathrm{V}(B + R)$.
2. En déduire $\operatorname{Cov}(B, R)$.

★ Connaître les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 5 [Solution]
Une compagnie aérienne spécialisée dans les voyages d'affaires exploite une ligne Toulouse-Paris d'une capacité de 150 places. Pour ce vol, une analyse statistique a montré qu'un passager ayant réservé son billet se présentait à l'embarquement avec une probabilité de $p = 0,8$. La compagnie souhaite optimiser le remplissage de l'avion et souhaite vendre n billets, avec $n > 150$, mais en limitant le risque que plus de 150 personnes se rendent à l'embarquement à moins de 4%.
On supposera dans la suite que $np < 150$. On définit la variable aléatoire S_n comme le nombre de personnes, parmi les n ayant réservé un billet, se présentant à l'embarquement.

1. Quelle est la loi de S_n ?
2. Montrer que $(S_n \geqslant 150) \subset (|S_n - np| \geqslant 150 - np)$.
3. En déduire que $P(S_n \geqslant 150) \leqslant \frac{np(1-p)}{(150-np)^2}$.
4. Résoudre l'inéquation $\frac{x(1-p)}{(150-x)^2} \leqslant 0{,}04$ d'inconnue $x \in]0, 150[$.
5. Combien la compagnie peut-elle vendre de billets tout en s'assurant que la probabilité que plus de 150 clients se présentent à l'embarquement est inférieure à 4% ?

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.
Pour tout $k \in [\![1, N+2]\!]$, notons B_k (resp. N_k) la k-ième boule tirée est blanche (resp. noire).
Le support de la variable aléatoire X est $X(\Omega) = [\![1, N+1]\!]$.
On a $(X = 1) = B_1$ d'où $P(X = 1) = \frac{2}{N+2}$. De plus, pour tout $k \in [\![2, N+1]\!]$, $(X = k) = N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$, d'où

$$P(X = k) = P(N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k) = P(N_1) \times \cdots \times P(B_k | N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1}) = \frac{N}{N+2} \frac{N-1}{N+1} \cdots \frac{N+2-k}{N+4-k} \frac{2}{N+3-k}$$

i.e. $P(X = k) = \frac{2(N+2-k)}{(N+2)(N+1)}$. Cette formule coïncide pour $k = 1$, d'où $P(X = k) = \frac{2(N+2-k)}{(N+2)(N+1)}$ pour tout $k \in [\![1, N+1]\!]$.
Calculons l'espérance et la variance de X.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{N+1} \frac{2(N+2-k)}{(N+2)(N+1)} k \\
&= \frac{2}{(N+2)(N+1)} \sum_{k=1}^{N+1} (N+2)k - k^2 \\
&= \frac{2}{(N+2)(N+1)} \left(\frac{(N+1)(N+2)^2}{2} - \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6} \right) \\
&= N + 2 - \frac{2N+3}{3} \\
&= \frac{N+3}{3}.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{N+1} \frac{2(N+2-k)}{(N+2)(N+1)} k^2 \\
&= \frac{2}{(N+2)(N+1)} \sum_{k=1}^{N+1} (N+2)k^2 - k^3 \\
&= \frac{2}{(N+2)(N+1)} \left(\frac{(N+1)(N+2)^2(2N+3)}{6} - \frac{(N+1)^2(N+2)^2}{4} \right) \\
&= \frac{(N+2)(2N+3)}{3} - \frac{(N+1)(N+2)}{2} \\
&= \frac{(N+2)(N+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(N+2)(N+3)}{6} - \left(\frac{N+3}{3}\right)^2 = \frac{N(N+3)}{18}$.

Exercice 2 [Enoncé]
Notons X_1 et X_2 les variables aléatoires représentant les résultats respectifs du premier et du second dé. Les dés sont équilibrés, par conséquent $X_1 \sim \mathscr{U}([\![1, 12]\!])$ et $X_2 \sim \mathscr{U}([\![1, 20]\!])$. On cherche $P(2X_1 \geqslant X_2)$.

$$\begin{aligned}
P(2X_1 \geqslant X_2) &= \mathrm{E}\left(\mathbb{1}_{\{2X_1 \geqslant X_2\}}\right) \\
&= \sum_{x_1=1}^{12} \sum_{x_2=1}^{20} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \mathbb{1}_{\{2X_1 \geqslant X_2\}}(x_1, x_2) \\
&= \sum_{x_1=1}^{12} \sum_{x_2=1}^{\min(2x_1, 20)} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) && \text{car } X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \\
&= \frac{1}{240} \left(\sum_{x_1=1}^{10} \sum_{x_2=1}^{2x_1} 1 + \sum_{x_1=11}^{12} \sum_{x_2=1}^{20} 1 \right) \\
&= \frac{1}{240} \left(\sum_{x_1=1}^{10} 2x_1 + 40 \right) \\
&= \frac{1}{240} \left(2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 40 \right) = \frac{15}{24}
\end{aligned}$$

Exercice 3 [Enoncé]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
On remplit une urne avec n boules de la façon suivante : pour chaque boule, on lance une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est égale à p ; on met dans l'urne une boule blanche si la pièce donne pile, une boule rouge si elle donne face.

1. On désigne par X le nombre de boules blanches présentes dans l'urne une fois qu'on a fini de la remplir.
   La variable aléatoire X représente le nombre de succès lors de n épreuves indépendantes de Bernoulli (1 si pile et 0 si face). Par conséquent, $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Ainsi, $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
2. Soit k un entier compris entre 1 et n.
   On extrait de l'urne une poignée de k boules prises au hasard, et on note Y la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches de cette poignée.
   (a) On a $(X,Y)(\Omega) \subset [\![0,n]\!] \times [\![0,k]\!]$.
   Pour tout $(x,y) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,k]\!]$, si $y > x$ ou $k-y > n-x$, $(X = x, Y = y) = \emptyset$ d'où $P(X = x, Y = y) = 0$, sinon :
$$\begin{aligned} P(X=x,Y=y) &= P(X=x)\,P(Y=y|X=x) \\ &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \frac{\binom{x}{y}\binom{n-x}{k-y}}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{n!x!(n-x)!k!(n-k)!}{x!(n-x)!y!(x-y)!(k-y)!(n-k-(x-y))!n!} p^x(1-p)^{n-x} \\ &= \frac{k!(n-k)!}{y!(x-y)!(k-y)!(n-k-(x-y))!} p^x(1-p)^{n-x} = \binom{k}{y}\binom{n-k}{x-y} p^x(1-p)^{n-x} \end{aligned}$$
   (b) On a $Y(\Omega) \subset [\![0,k]\!]$. De plus, en utilisant la formule des probabilités totales sur le s.c.e. $(X = x)_{x \in [\![0,n]\!]}$, on obtient, pour tout $y \in [\![0,k]\!]$,
$$\begin{aligned} P(Y=y) &= \sum_{x=0}^{n} P(X=x,Y=y) \\ &= \sum_{x=y}^{n-k+y} \binom{k}{y}\binom{n-k}{x-y} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \binom{k}{y} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} p^{i+y}(1-p)^{n-y-i} \text{ en utilisant le décalage d'indice } i = x-y \\ &= \binom{k}{y} p^y (1-p)^{k-y} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} p^i (1-p)^{n-k-i} = \binom{k}{y} p^y (1-p)^{k-y} \end{aligned}$$
   Donc $Y \sim \mathscr{B}(k,p)$.
   (c) On a $P(X = 0, Y = n) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = n)$. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.
   (d)
$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{y=0}^{k}\sum_{x=0}^{n} P(X=x,Y=y)\,xy \\ &= \sum_{y=0}^{k} y\binom{k}{y}\left(\sum_{x=y}^{n-k-y}\binom{n-k}{x-y}p^x(1-p)^{n-x}x\right) \\ &= \sum_{y=0}^{k} y\binom{k}{y}p^y(1-p)^{k-y}\left(\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}p^i(1-p)^{n-k-i}(i+y)\right) \text{ (analoque au calcul de la question b)} \\ &= \sum_{y=0}^{k} y\binom{k}{y}p^y(1-p)^{k-y}((n-k)p+y) \text{ en utilisant } \sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}p^i(1-p)^{n-k}i = (n-k)p \\ &= (n-k)pE(Y) + E(Y^2) \\ &= (n-k)pE(Y) + V(Y) + E(Y)^2 = (n-k)kp^2 + kp(1-p) + (kp)^2 = kp(np+1-p) \end{aligned}$$
   D'où $\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = kp(1-p)$. C'est assez rassurant de voir que cette quantité est positive (X et Y tendent à évoluer dans le même sens).

Exercice 4 [Enoncé]
Une urne contient N boules qui sont blanches, rouges ou noires.
On note p_B et p_R les proportions respectives de boules blanches et rouges.
On extrait successivement et avec remise n boules dans cette urne.
Soient B et R les variables aléatoires égales respectivement au nombre de boules blanches et rouges obtenues.

1. On a $B \sim \mathscr{B}(n, p_B)$, $R \sim \mathscr{B}(n, p_R)$ et $B + R \sim \mathscr{B}(n, p_B + p_R)$,
d'où $\mathrm{V}(B) = np_B(1 - p_B)$, $\mathrm{V}(R) = np_R(1 - p_R)$ et $\mathrm{V}(B + R) = n(p_B + p_R)(1 - p_B - p_R)$.
2. $\mathrm{Cov}(B, R) = \frac{1}{2}(\mathrm{V}(B + R) - \mathrm{V}(B) - \mathrm{V}(R)) = \frac{n}{2}\left((p_B + p_R)(1 - p_B - p_R) - p_B(1 - p_B) - p_R(1 - p_R)\right)$.
D'où $\mathrm{Cov}(B, R) = -np_Bp_R$.

Exercice 5 [Enoncé]
On supposera dans la suite que $np < 150$. On définit la variable aléatoire S_n comme le nombre de personnes, parmi les n ayant réservé un billet, se présentant à l'embarquement.

1. S_n compte le nombre de succès (se présenter à l'embarquement) lors de la réalisation de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = 0.8$. Par conséquent, $S_n \sim \mathscr{B}(n, p)$.
2. $(S_n \geqslant 150) = (S_n - np \geqslant 150 - np)$. Or $|S_n - np| \geqslant S_n - np$ d'où $(S_n \geqslant 150) \subset (|S_n - np| \geqslant 150 - np)$.
3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|S_n - np| \geqslant 150 - np) = P(|S_n - (S_n)| \geqslant 150 - np) \leqslant \frac{V(S_n)}{(150-np)^2}$.
Or $V(S_n) = np(1 - p)$ d'où $P(S_n \geqslant 150) \leqslant \frac{np(1-p)}{(150-np)^2}$.
4. Soit $x \in]0, 150[$.

$$\frac{x(1 - p)}{(150 - x)^2} \leqslant 0{,}04 \iff x \leqslant 0,2(150-x)^2 \iff 5x \leqslant x^2 - 300x + 150^2 \iff 0 \leqslant x^2 - 305x + 150^2 \iff x \leqslant 125$$

Résoudre l'inéquation $\frac{x(1-p)}{(150-x)^2} \leqslant 0{,}05$ d'inconnue $x \in]0, 150[$.

5. Pour $np \leqslant 125$ i.e. $n \leqslant 156$, on a $P(S_n \geqslant 150) \leqslant \frac{np(1-p)}{(150-np)^2} \leqslant 0,04$. La compagnie peut donc vendre 156 billets tout en s'assurant que la probabilité que plus de 150 clients se présentent à l'embarquement est inférieure à 4%.