Chapitre 25 : Probabilités

★ Reconnaître la situation d'équiprobabilité dans un exercice et se ramener à un problème de dénombrement.

Exercice 1 [Solution]
Le Chevalier de Méré, joueur passionné et détenteur de dés à 6 faces équilibrés, propose à un ami deux paris différents.

1. Pour le premier pari, le Chevalier de Méré parie que, en lançant 4 dés, il obtiendra au moins un six. Son ami parie le contraire. Déterminez la probabilité que le Chevalier de Méré gagne ce pari.
2. Pour le deuxième pari, le Chevalier de Méré parie que, en lançant 24 paires de dés, il obtiendra au moins un double six. Son ami parie le contraire. Déterminez la probabilité que le Chevalier de Méré gagne ce pari.

Exercice 2 [Solution]
Dix paires de chaussures sont rangées dans un placard.

1. On prend au hasard deux chaussures. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ?
2. Même question si on prend trois chaussures au lieu de deux.
3. [**] On prend au hasard quatre chaussures. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une paire ?

★ Utiliser la formule des probabilités totales dans un modèle dit "markovien" pour obtenir une relation de récurrence.

Exercice 3 [Solution]
Une puce effectue des sauts aléatoires sur les sommets d'un triangle ABC. À chaque saut, elle peut soit sauter sur place avec la probabilité p, soit sauter vers un des deux autres sommets, avec la probabilité q pour chaque sommet.
On suppose que la puce est initialement placée en A. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n, respectivement B_n, C_n, les événements : " Après le n-ième saut, la puce est au point A, respectivement B, C " et a_n, b_n, c_n leurs probabilités respectives.

1. Démontrer une relation entre p et q puis montrer que $q \in [0; \frac{1}{2}]$.
2. Justifier que $a_{n+1} = (1-2q)a_n + qb_n + qc_n$.
3. Déterminer des relations similaires pour b_{n+1} et c_{n+1}. En déduire une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$
4. Écrire M comme combinaison linéaire de I_3 et U, où U est la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 1, puis calculer M^n à l'aide de la formule du binôme.
5. En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n, puis calculer leurs limites lorsque $n \to +\infty$. Interpréter ce résultat.

★ Utiliser la formule de Bayes pour calculer une probabilité conditionnelle.

Exercice 4 [Solution]
Lors d'une interrogation, un étudiant se trouve face à une question dont 4 réponses possibles sont proposées et une seule est correcte. Soit l'étudiant connaît la réponse à la question, soit il choisit au hasard une réponse parmi les 4 proposées. La probabilité que cet étudiant connaisse la réponse à la question est $p \in]0,1[$.
Sachant que l'étudiant a répondu correctement à la question, quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la bonne réponse ?

★ Utiliser l'indépendance ou la formule des probabilités composées pour calculer la probabilité d'une intersection.

Exercice 5 [Solution]
Urne de Pólya.
On procède à des tirages successif avec remise dans une urne composée d'une boule blanche et d'une boule noire en respectant la règle suivante : chaque tirage d'une boule entraine l'ajout d'une boule de la même couleur.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est la probabilité que les n premières boules tirées soient blanches ?

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]

1. Pour le premier pari, le Chevalier de Méré lance 4 dés.
   On note $\Omega = [\![1;6]\!]^4$ l'univers de cette expérience aléatoire. Il a équiprobabilité sur Ω.
   Notons A l'événement « obtenir au moins un six ». On a $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \simeq 0,5177$.
   Le Chevalier de Méré a plus de 51% de chance de gagner son pari.
2. Pour le deuxième pari, le Chevalier de Méré lance 24 paires de dés.
   On note $\Omega = \left([\![1;6]\!]^2\right)^{24}$ l'univers de cette expérience aléatoire. Il a équiprobabilité sur Ω.
   Notons A l'événement « obtenir au moins un double six ». On a $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \simeq 0,4914$.
   Le Chevalier de Méré a moins de 50% de chance de gagner son pari.

Exercice 2 [Enoncé]

1. On prend au hasard deux chaussures. L'univers associé à l'expérience aléatoire est l'ensemble des tirages de 2 chaussures dans un ensemble à 20 chaussures. Il y a équiprobabilité sur cet univers que l'on notera Ω. Notons également A l'évènement « obtenir une paire ».
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{\binom{20}{2}} = \frac{1}{19}$$
2. On prend au hasard trois chaussures. L'univers associé à l'expérience aléatoire est l'ensemble des tirages de 3 chaussures dans un ensemble à 20 chaussures. Il y a équiprobabilité sur cet univers que l'on notera Ω. Notons également A l'évènement « obtenir une paire ». Il y a 10×18 tirages possibles contenant une paire. En effet, un tel tirage est déterminé par le choix de la paire (10 choix) et d'une chaussure parmi les 18 restantes (18 choix).
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10 \times 18}{\binom{20}{3}} = \frac{3}{19}$$
3. On prend au hasard quatre chaussures. L'univers associé à l'expérience aléatoire est l'ensemble des tirages de 4 chaussures dans un ensemble à 20 chaussures. Il y a équiprobabilité sur cet univers que l'on notera Ω. Notons également A l'évènement « obtenir au moins une paire ». Il y a $10 \times \binom{18}{2} - \binom{10}{2}$ tirages possibles contenant au moins une paire. En effet, un tel tirage est déterminé par le choix d'une paire (10 choix) et de deux chaussures parmi les 18 restantes ($\binom{18}{2}$ choix) sauf qu'avec cette méthode, on compte deux fois les double-paires, par conséquent il faut retrancher le nombre de doubles paires possibles $\binom{10}{2}$. D'où
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10 \times \binom{18}{2} - \binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{99}{323}$$

<u>Deuxième méthode :</u>
Nous avons modélisé le problèmes par des tirages simultanés mais nous pouvons aussi considérer que les tirages sont successifs et sans remise. Les univers vont changer mais pas les probabilités des évènements recherchées.

1. L'univers associé à l'expérience aléatoire est l'ensemble des tirages, successifs et sans remise, de 2 chaussures dans un ensemble à 20 chaussures. Il y a équiprobabilité sur cet univers que l'on notera Ω. Notons également A l'évènement « obtenir une paire ».
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{20 \times 1}{20 \times 19} = \frac{1}{19}$$
2. L'univers associé à l'expérience aléatoire est l'ensemble des tirages, successifs et sans remise, de 3 chaussures dans un ensemble à 20 chaussures. Il y a équiprobabilité sur cet univers que l'on notera Ω. Notons également A l'évènement « obtenir une paire ».
$$P(\overline{A}) = \frac{|\overline{A}|}{|\Omega|} = \frac{20 \times 18 \times 16}{20 \times 19 \times 18} = \frac{16}{19} \text{ d'où } P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{3}{19}$$
3. L'univers associé à l'expérience aléatoire est l'ensemble des tirages, successifs et sans remise, de 4 chaussures dans un ensemble à 20 chaussures. Il y a équiprobabilité sur cet univers que l'on notera Ω. Notons également A l'évènement « obtenir au moins une paire ».
$$P(\overline{A}) = \frac{|\overline{A}|}{|\Omega|} = \frac{20 \times 18 \times 16 \times 14}{20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{224}{1323} \text{ d'où } P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{99}{323}$$

Exercice 3 [Enoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n, respectivement B_n, C_n, les événements : " Après le n-ième saut, la puce est au point A, respectivement B, C " et a_n, b_n, c_n leurs probabilités respectives.

1. Le système (A_1, B_1, C_1) est un système complet d'évènements, d'où $P(A_1) + P(B_1) + P(C_1) = 1$ i.e. $p + 2q = 1$. On a $q \geqslant 0$ et $p = 1 - 2q \geqslant 0$. Donc $q \in [0; \frac{1}{2}]$.
2. Le système (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales
$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P(A_{n+1}|A_n) + P(B_n)P(A_{n+1}|B_n) + P(C_n)P(A_{n+1}|C_n)$$
i.e. $a_{n+1} = pa_n + qb_n + qc_n = (1-2q)a_n + qb_n + qc_n$.
3. De même, $b_{n+1} = qa_n + (1-2q)b_n + qc_n$ et $c_{n+1} = qa_n + qb_n + (1-2q)c_n$. Donc
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2q) & q & q \\ q & (1-2q) & q \\ q & q & (1-2q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$
On notera $M = \begin{pmatrix} (1-2q) & q & q \\ q & (1-2q) & q \\ q & q & (1-2q) \end{pmatrix}$.
4. $M = (1-3q)I_3 + qU$. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U^k = 3^{k-1}U$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} M^n &= ((1-3q)I_3 + qU)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-3q)^{n-k} U^k \\ &= (1-3q)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-3q)^{n-k} 3^{k-1} \right) U \\ &= (1-3q)^n I_3 + \left(\frac{1}{3} \left((3q + 1 - 3q)^n - (1-3q)^n \right) \right) U \\ &= (1-3q)^n I_3 + \frac{1}{3} \left(1 - (1-3q)^n \right) U \end{aligned}$$
De plus, cette formule est vraie pour $n = 0$.
5. On a $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \left((1-3q)^n I_3 + \frac{1}{3} \left(1 - (1-3q)^n \right) U \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-3q)^n + \frac{1}{3} \left(1 - (1-3q)^n \right) \\ \frac{1}{3} \left(1 - (1-3q)^n \right) \\ \frac{1}{3} \left(1 - (1-3q)^n \right) \end{pmatrix}$.
On a $q \in [0; \frac{1}{2}]$, d'où $1 - 3q \in [-\frac{1}{2}; 1]$.
<u>Cas $q = 0$:</u> $1 - 3q = 1$, donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
<u>Cas $q \neq 0$:</u> $1 - 3q \in]-1; 1[$, donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
Asymptotiquement, même si la puce était initialement en A, elle a autant de chance de se trouver sur les sommets A, B ou C (sauf dans le cas trivial où $q = 0$: la puce ne bouge jamais et donc reste sur le sommet A).

Exercice 4 [Enoncé]
Notons A l'évènement « l'étudiant connaît la réponse » et B l'évènement « l'étudiant répond correctement ».
On cherche $P_B(A)$.
$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$$
Or, d'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'évènements $(A, \overline{A})$, on obtient :
$$P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A}) = 1 \times p + \frac{1}{4} \times (1-p) = \frac{1}{4}(1+3p)$$
D'où
$$P_B(A) = \frac{p}{\frac{1}{4}(1+3p)} = \frac{4p}{1+3p}$$
Sachant que l'étudiant a répondu correctement à la question, la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la bonne réponse est de $\frac{4p}{1+3p}$.

Exercice 5 [Enoncé]
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons A_k l'évènement « on tire une boule blanche au k-ième tirage ».
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$