Chapitre 24 : Dénombrement

★ Utiliser les théorèmes du programmes sur les cardinaux d'ensembles finis.

Extrait du programme :
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.
Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.
Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Exercice 1 [Solution]
Soient b et n deux entiers naturels avec b non nul.

1. Considérons l'application $f_n : (x_0, \dots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i b^i$ définie sur $[\![0, b[\![^{n+1}$.
   Montrer, par récurrence sur n, que l'image de f_n est l'intervalle d'entiers $[\![0, b^{n+1}[\![$.
2. En déduire que pour tout $a \in [\![0, b^{n+1}[\![$, il existe un unique $n+1$-uplet $(x_0, \dots, x_n) \in [\![0, b[\![^{n+1}$ tel que $a = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i b^i$.
3. Application : un commerçant souhaite peser ses ventes, qui se font par tranche de un gramme. Il possède uniquement une balance à plateaux, il lui faut donc se procurer des poids. Quels sont les poids qui lui permettront de peser toutes ses ventes jusqu'à 255 g ? Le commerçant souhaite bien évidemment acheter le minimum de poids.

★ Reconnaître une liste, un arrangement ou une combinaison dans un exercice pratique.

Exercice 2 [Solution]
Une urne contient sept boules de couleurs distinctes.

1. On tire simultanément cinq boules de l'urne. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. On tire, successivement et sans remise, cinq boules de l'urne. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
3. On tire, successivement et avec remise, cinq boules de l'urne. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
Soient b et n deux entiers naturels avec b non nul.

1. Considérons l'application $f : (x_0, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} x_i b^i$ définie sur $[\![0, b[\![^{n+1}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété suivante : $\mathrm{Im}(f_n) = [\![0, b^{n+1}[\![$.
   Montrons par récurrence que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation : $f_0 : x_0 \mapsto x_0$ est définie sur $[\![0, b[\![$. D'où $\mathrm{Im}(f_0) = [\![0, b[\![$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}_n$.
   Pour tout x_0, …, x_{n+1} dans $[\![0, b[\![$, $\sum_{i=0}^{n+1} x_i b^i \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant \sum_{i=0}^{n+1} x_i b^i \leqslant \sum_{i=0}^{n+1} (b-1) b^i = \sum_{i=0}^{n+1} b^{i+1} - b^i = b^{n+2} - 1 < b^{n+2}$.
   Par conséquent, $\mathrm{Im}(f_{n+1}) \subset [\![0, b^{n+2}[\![$.
   Montrons l'inclusion retour. Soit $a \in [\![0, b^{n+2}[\![$.
   Considérons le quotient q et le reste r de la division euclidienne de a par b. D'où $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.
   On a $q \geqslant 0$ et $q = \frac{a-r}{b} < \frac{b^{n+2}-0}{b} = b^{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $(x_0, \dots, x_n) \in [\![0, b[\![^{n+1}$ tel que $q = \sum_{i=0}^{n} x_i b^i$. D'où $a = bq + r = r + x_0 b + \dots x_n b^{n+1} = f_{n+1}(r, x_0, \dots, x_n)$. Par conséquent, $a \in \mathrm{Im}(f_{n+1})$.
   D'où $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : $\mathrm{Im}(f_n) = [\![0, b^{n+1}[\![$.
2. L'application f_n qui va de $[\![0, b[\![^n$ à valeurs dans $[\![0, b^n[\![$ est surjective.
   De plus, $\mathrm{Card}\left([\![0, b[\![^n\right) = \mathrm{Card}\left([\![0, b[\![\right)^n = b^n = \mathrm{Card}\left([\![0, b[\![\right)^n$. Le cardinal des espaces de départ et d'arrivée sont finis et égaux, par conséquent, f_n est bijective. Pour tout $a \in [\![0, b^{n+1}[\![$, il existe un unique $n+1$-uplet $(x_0, \dots, x_n) \in [\![0, b[\![^{n+1}$ tel que $a = \sum_{i=0}^{n} x_i b^i$.
3. L'image de l'application $f : (x_0, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} x_i p_i$ définie sur $\{0; 1\}^{n+1}$ à valeurs dans $\left[\!\!\left[0, \sum_{i=0}^{n} p_i\right]\!\!\right]$ modélise toutes les pesées possibles si on dispose des poids de valeurs entières p_0, …, p_n.
   Le choix des poids répond au problème du commerçant lorsque $[\![0, 255]\!] \subset \mathrm{Im}(f)$ et il est optimal lorsque l'application f est injective (pas de pesée redondante).
   D'après la question précédente, pour $b = 2$ et $n = 6$, l'application $f_6 : (x_0, \dots, x_6) \mapsto \sum_{i=0}^{6} x_i 2^i$ définie sur $\{0; 1\}^7$ à valeurs dans $[\![0, 2^{6+1}[\![= [\![0, 255]\!]$ est bijective donc elle répond au problème.
   Le commerçant doit donc choisir sept poids de 1g, 2g, 4g, … et 128g afin de peser toutes ses ventes de façon optimale.

Exercice 2 [Enoncé]
Une urne contient sept boules de couleurs distinctes.

1. On tire simultanément cinq boules de l'urne. Le nombre de tirage est le nombre de combinaison de 5 éléments dans un ensemble à 7 éléments. Il y a donc $\binom{7}{5} = 21$ tirages possibles.
2. On tire, successivement et sans remise, cinq boules de l'urne. Le nombre de tirage est le nombre d'arrangement de 5 éléments dans un ensemble à 7 éléments. Il y a donc $\frac{7!}{(7-5)!} = 2520$ tirages possibles.
3. On tire, successivement et avec remise, cinq boules de l'urne. Le nombre de tirage est le nombre de liste de 5 éléments d'un ensemble à 7 éléments. Il y a donc $7^5 = 16807$ tirages possibles.