Chapitre 23 : Déterminant

★ Calculer un déterminant en l'exprimant sous forme d'un produit. Pour ce faire, afficher un maximum de zéros avec les opérations élémentaires puis développer par rapport à une ligne ou à une colonne.

Exercice 1 [Solution]
Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice suivante est-elle inversible ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m & -m \\ m & 1 & 1 & m \\ m & -1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

★ Montrer qu'une famille est une base à l'aide d'un déterminant.

Exercice 2 [Solution]
Montrer à l'aide d'un déterminant que la famille $(2X^2 - 1, X^2 - X + 2, 3X + 4)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

★ Calculer le déterminant d'un endomorphisme afin de montrer que c'est un automorphisme.

Exercice 3 [Solution]
Soit $m \in \mathbb{R}$. Considérons l'application

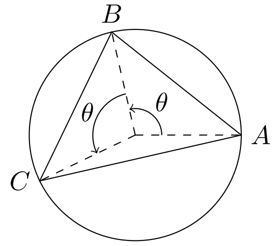
$$f_m : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} m(a+b) & b+d \\ c+2a & m(d+c) \end{pmatrix}$$

Montrer que f_m est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $m \neq 0$.

★ Utiliser un déterminant à des fins géométriques.

Exercice 4 [Solution]

Dans le plan, déterminer les angles $\theta \in [0, \pi]$ pour lesquels l'aire du triangle ABC de sommets d'affixes 1, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$ est maximale.



Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
L'inversibilité d'une matrice est caractérisée par un déterminant non nul. Soit $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m & -m \\ m & 1 & 1 & m \\ m & -1 & 1 & -m \end{vmatrix} &= m \begin{vmatrix} 1 & m & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -m & -1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2}{=} m \begin{vmatrix} 0 & m+1 & -1-m & 0 \\ -1 & 1 & -m & -1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3+L_4}{=} m \begin{vmatrix} 0 & m+1 & -1-m & 0 \\ -1 & 1 & -m & -1 \\ 2m & 0 & 2 & 0 \\ m & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2m(m+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -m & -1 \\ m & 0 & 1 & 0 \\ m & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\underset{C_3 \leftarrow C_2+C_3}{=} 2m(m+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1-m & -1 \\ m & 0 & 1 & 0 \\ m & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2m(m+1) \begin{vmatrix} -1 & 1-m & -1 \\ m & 1 & 0 \\ m & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1-L_3}{=} -2m(m+1) \begin{vmatrix} -1-m & 1-m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ m & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2m(m+1)(-1-m-m(1-m)) \\
\begin{vmatrix} 1 & m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m & -m \\ m & 1 & 1 & m \\ m & -1 & 1 & -m \end{vmatrix} &= 2m(m+1)(m^2-2m-1)
\end{aligned}$$

La matrice est inversible si, et seulement si, $m \in \mathbb{R}\backslash\{0; -1; 1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}\}$.

Exercice 2 [Enoncé]
Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(2X^2-1, X^2-X+2, 3X+4) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
D'où

$$\det_{\mathscr{B}}(2X^2-1, X^2-X+2, 3X+4) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3+2L_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \times (-8-15) = 23 \neq 0$$

La famille $(2X^2-1, X^2-X+2, 3X+4)$ est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3 [Enoncé]
Soit $m \in \mathbb{R}$. L'application $f_m : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m(a+b) & b+d \\ c+2a & m(d+c) \end{pmatrix}$ est bien un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, si on note $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, alors

$$\mathrm{Mat}(f_m) = \begin{pmatrix} m & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m & m \end{pmatrix} \text{ d'où } \det(f_m) = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m & m \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & m & m \end{vmatrix} = m(m-2m) = -m^2$$

Par conséquent, f_m est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $m \neq 0$.

Exercice 4 [Enoncé]
Soit $\theta \in [0, \pi]$. L'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2}\left|\det_{\mathscr{B}_c}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|$ où $\mathscr{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Ce résultat découle du fait que $\det_{\mathscr{B}_c}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est l'aire relative du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Or

$$\begin{aligned}
\det{}_{\mathscr{B}_c}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \begin{vmatrix} \cos(\theta)-1 & \cos(2\theta)-1 \\ \sin(\theta) & \sin(2\theta) \end{vmatrix} \\
&= \cos(\theta)\sin(2\theta) - \sin(\theta)\cos(2\theta) - \sin(2\theta) + \sin(\theta) \\
&= 2\sin(\theta) - \sin(2\theta)
\end{aligned}$$

Étudions la fonction $f : \theta \mapsto 2\sin(\theta) - \sin(2\theta)$ sur $[0, \pi]$.
Cette dernière est dérivable et pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $f'(\theta) = 2\left(\cos(\theta) - \cos(2\theta)\right) = 2\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

<u>Recherche des points critiques de f :</u>
Soit $\theta \in [0, \pi]$, $f'(\theta) = 0 \iff \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ ou $\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) = 0 \iff \theta \in \{0; \frac{2\pi}{3}; \pi\}$.

On peut à présent dresser le tableau de variation de f :

θ	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

Par conséquent, l'aire du triangle ABC est maximale uniquement lorsque $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et vaut $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.