Chapitre 21 : Séries numériques

★ Calculer la somme d'une série géométrique de raison q (où $|q| < 1$) ou d'une série de terme général $\frac{z^n}{n!}$.

Exercice 1 [Solution]

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geqslant 1$, la série $\sum nx^n$ diverge grossièrement.
2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est dérivable et calculer S_n' de deux manières différentes.
   (b) En déduire que, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum nx^n$ converge et déterminer sa somme.

★ Utiliser une comparaison série-intégrale pour obtenir un équivalent de la suite des sommes partielles ou des restes.

★ Utiliser le lien suite-série qui stipule que (u_n) et $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

Exercice 2 [Solution]
On considère la série $\sum \frac{1}{n}$, dont on note H_n la somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $H_n \sim \ln(n)$.
2. Notons $u_n = H_n - \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   En étudiant la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$, montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$. *Nous venons de déterminer le développement asymptotique à deux termes de la série harmonique. La constante γ est appelée constante d'Euler-Mascheroni.*

★ Déterminer un équivalent du terme général d'une série à termes positifs afin de déterminer sa nature.

Exercice 3 [Solution]
Déterminer la nature de la série $\sum \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

★ Montrer qu'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $n^\alpha u_n \longrightarrow 0$ afin de montrer que la série à termes positifs $\sum u_n$ converge.

Exercice 4 [Solution]
Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$.

★ Montrer qu'une série numérique converge en montrant qu'elle converge absolument.

Exercice 5 [Solution]
Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geqslant 1$, alors $|nx^n| \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   D'où $nx^n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ et donc la série $\sum nx^n$ diverge grossièrement.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction S_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
   Par ailleurs, $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. D'où $S_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$.

   (b) Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k$; on remarque que $T_n(x) = xS_n'(x)$.
   Or $S_n'(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-x)^2}$ d'où $T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{(1-x)^2}$.
   Par conséquent, la série $\sum nx^n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Exercice 2 [Enoncé]

1. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$, pour tout $k \in [\![2;n]\!]$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t\,.$$

   D'où

$$1 + \sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

   i.e.

$$1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant H_n \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

   i.e.

$$\underbrace{1+\ln(n+1)-\ln(2)}_{\sim\ln(n)} \leqslant H_n \leqslant \underbrace{1+\ln(n)}_{\sim\ln(n)}\,.$$

   D'où $H_n \sim \ln(n)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   D'où $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$. Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente. Ainsi, d'après les critères de comparaisons des séries à termes constants, $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est convergente. On en déduit que la suite (u_n) est convergente.
3. Autrement dit, il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \longrightarrow \gamma$ i.e. $u_n = \gamma + o(1)$ i.e. $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Exercice 3 [Enoncé]

On a $\tan(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$. Or $\sum \frac{1}{n}$ est le terme positif d'une série divergente.
D'après les critères de comparaisons des séries à termes positifs, la série $\sum \tan(\frac{1}{n})$ diverge.

Exercice 4 [Enoncé]

On a $n^{\frac{5}{4}}\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}} \longrightarrow 0$. Par conséquent, $\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)$.
Or d'après le théorème des séries de Riemann, $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ est une série convergente.
D'après les critères de comparaisons des séries à termes positifs, $\sum \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$ converge.

Exercice 5 [Enoncé]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$. Or d'après le théorème des séries de Riemann, $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente.
D'après les critères de comparaisons des séries à termes positifs, $\sum \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right|$ converge i.e. $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge absolument.
Par conséquent, la série $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge.