Chapitre 20 : Intégration

★ Utiliser les techniques classiques pour calculer une intégrale : primitives usuelles, intégration par parties, changement de variable, décomposition en éléments simples, argument de parité ou de périodicité, linéarisation des fonctions circulaires, ...

Exercice 1 [Solution]

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan(x)}\mathrm{d}x$.

★ Reconnaître une somme de Riemann et la calculer.

Exercice 2 [Solution]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$. Déterminer un équivalent simple de la suite (u_n).

★ Se ramener au théorème fondamental de l'analyse pour étudier une fonction définie par une intégrale.

Exercice 3 [Solution]

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Considérons $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer φ' en fonction de f.

★ Comparer une fonction à son polynôme de Taylor.

Exercice 4 [Solution]

Considérons $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer une expression explicite de f'.
2. Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange pour sin à l'ordre 1 en 0.
3. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer $f'(0)$.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
Nous allons utiliser le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$: $y = \tan(x)$ (et donc $x = \mathrm{Arctan}(y)$ d'où $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y$).

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan(x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+y} \times \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{(1+y)(1+y^2)}\mathrm{d}y\,.$$

Notons $f : y \mapsto \frac{1}{(1+y)(1+y^2)}$. D'après le théorème de la décomposition en éléments simples, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \quad \frac{1}{(1+y)(1+y^2)} = \frac{a}{1+y} + \frac{by+c}{1+y^2}$$

Déterminons a, b et c.
On a $(1+y)f(y) = a + (1+y)\frac{by+c}{1+y^2} \underset{y\to -1}{\longrightarrow} a$ et $(1+y)f(y) = \frac{1}{1+y^2} \underset{y\to -1}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$. Par unicité de la limite, $a = \frac{1}{2}$.
Par ailleurs, $yf(y) = \frac{ay}{1+y} + \frac{by^2+cy}{1+y^2} \underset{y\to +\infty}{\longrightarrow} a+b$ et $yf(y) = \frac{y}{(1+y)(1+y^2)} \underset{y\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $b = -a = -\frac{1}{2}$.
En évaluant en 0, on trouve $1 = a + c$ donc $c = 1 - a = \frac{1}{2}$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan(x)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y}\mathrm{d}y - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2y}{1+y^2}\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\ln|1+y|\right]_0^1 - \tfrac{1}{4}\left[\ln|1+y^2|\right]_0^1 + \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{Arctan}(y)\right]_0^1 \\ &= \frac{\ln(2)}{4} + \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{2\ln(2)+\pi}{8}\end{aligned}$$

Exercice 2 [Enoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^3}u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}$. Notons $f : x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$.
Par composée, la fonction f est continue sur $[0,1]$. D'après le théorème des sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n^3}u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\mathrm{d}t\,.$$

En utilisant le changement de variable $\mathscr{C}^1$ suivant : $u = \frac{1}{2} - t$ (d'où $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$), on obtient :
$\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{(\tfrac{1}{2}-u)(\tfrac{1}{2}+u)}\mathrm{d}u = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-(2u)^2}\mathrm{d}u.$
En utilisant le changement de variable $\mathscr{C}^1$ suivant : $u = \frac{1}{2}\sin(x)$ (d'où $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cos(x)\mathrm{d}x$ et $x = \mathrm{Arcsin}(2u)$), on obtient :
$\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{\mathrm{Arcsin}(-1)}^{\mathrm{Arcsin}(1)} \sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2x)+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \pi\right).$
Autrement dit, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}$ d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{8}n^3$.

Exercice 3 [Enoncé]
Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. L'application $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, en utilisant le changement de variable $u = t + x$ (et donc $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$), on obtient

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} f(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

En notant $\Psi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$ qui, d'après le théorème fondamental de l'analyse, est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\Psi' = f$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \Psi(2x) - \Psi(x)$.
Par conséquent, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 2\Psi'(2x) - \Psi'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

Exercice 4 [Enoncé]

1. En notant $\Psi : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ qui, d'après le théorème fondamental de l'analyse, est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $\Psi' : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2}$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \Psi(2x) - \Psi(x)$.
   Par conséquent, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$f'(x) = 2\Psi'(2x) - \Psi'(x) = 2\frac{\sin(2x)}{(2x)^2} - \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{2x^2} = \frac{\sin(x)(\cos(x)-1)}{x^2}$$
   De la même manière, on montre que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) = \dfrac{\sin(x)(\cos(x)-1)}{x^2}$.
2. La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour $t \in \mathbb{R}$, $|\sin^{(2)}(t)| \leqslant 1$.
   D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, $|\sin(t) - t| \leqslant \frac{t^2}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t + \int_x^{2x} \frac{t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_x^{2x} \frac{\sin(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t + [\ln(|t|)]_x^{2x} = \int_x^{2x} \frac{\sin(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t + \ln(2)$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$\left|\int_x^{2x} \frac{\sin(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{|\sin(t)-t|}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{x}{2}$$
   De même, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,
   $$\left|\int_x^{2x} \frac{\sin(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{2x}^{x} \frac{|\sin(t)-t|}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_{2x}^{x} \frac{1}{2}\mathrm{d}t = -\frac{x}{2}$$
   Par conséquent, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(2)$.
   La fonction f est prolongeable par continuité en posant $f(0) = \ln(2)$.
4. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x \times \frac{-x^2}{2}}{x^2} = -\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f'(0) = 0$.