Chapitre 2 : Nombres complexes et trigonométrie

★ Passer de l'écriture algébrique à l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe.

Exercice 1 [Solution]
Soit $z_1 = \sqrt{3} - \mathbf{i}$ et $z_2 = 1 + \mathbf{i}$.
Après avoir calculé $z = \frac{z_1}{z_2}$, donner la valeur exacte de $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

★ Manipuler conjugué, module et arguments d'un complexe afin d'obtenir des interprétations géométriques.

Exercice 2 [Solution]
Sans utiliser d'écriture algébrique, résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue complexe z puis donner une interprétation géométrique de l'ensemble des solutions :

(a) $z + \overline{z} = 4$.

(b) $|z - 3\mathbf{i}| \geqslant |z - \mathbf{i}|$.

(c) $z^4 = \overline{z}$.

★ Déterminer les racines carrées d'un complexe écrit sous forme algébrique.

Exercice 3 [Solution]
Déterminer les racines carrées de $\frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$ en utilisant uniquement des écritures algébriques puis uniquement des écritures trigonométriques. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

★ Déterminer les racines n-ième d'un complexe écrit sous forme trigonométrique.

Exercice 4 [Solution]
Déterminer les racines quatrièmes de $2 + \mathbf{i}\sqrt{12}$.

★ Résoudre des équations polynomiales de la variable complexe.

Exercice 5 [Solution]
Résoudre l'équation $z^3 - 2z^2 - \mathbf{i}z + 3 - \mathbf{i} = 0$ d'inconnue complexe z.
Montrer que les points images des solutions forment un triangle rectangle et isocèle.

Exercice 6 [Solution]
Résoudre l'équation $z^8 + (1 - 3\mathbf{i})z^4 - 4 = 0$ d'inconnue complexe z.

★ Résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.

Exercice 7 [Solution]
Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue réelle x :

(a) $\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2}$;

(b) $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$;

(c) $\tan(x) \leqslant 1$.

★ Résoudre des équations comprenant de l'exponentielle complexe.

Exercice 8 [Solution]
Résoudre l'équation $\mathbf{e}^z + \mathbf{e}^{-z} = 1$ d'inconnue complexe z.

★ Factorisation par l'angle moitié afin de retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Exercice 9 [Solution]
Résoudre les deux équations suivantes d'inconnue réelle x :

(a) $\cos(x) = \cos(5x)$;

(b) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.

★ Résoudre des problèmes géométriques en utilisant le module ou un argument de $\frac{c-a}{b-a}$.

Exercice 10 [Solution]
Montrer qu'il existe un unique triangle équilatéral, inscrit dans le cercle unité et dont un sommet est d'affixe 1.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
Soit $z_1 = \sqrt{3} - \mathbf{i}$ et $z_2 = 1 + \mathbf{i}$.

Forme algébrique de z

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1}{z_2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - \mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - \mathbf{i})(1 - \mathbf{i})}{(1 + \mathbf{i})(1 - \mathbf{i})} \\ &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{i} - 1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1 - \mathbf{i}(\sqrt{3} + 1)}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{z = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3} + 1}{2}} \quad (1)$$

Forme trigonométrique de z

D'une part, $z_1 = \sqrt{3} - \mathbf{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{i}\frac{1}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$

D'autre part, $z_2 = 1 + \mathbf{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$

Par conséquent, $z = \frac{z_1}{z_2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}} \\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\boxed{z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{5\pi}{12}}}$$

i.e. $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} - \mathbf{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ (2)

De plus, $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{6\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Or par identification des parties réelles dans (1) et (2), on en déduit que $\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

D'où, $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

Donc $\boxed{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}}$.

Exercice 2 [Enoncé]
Soit $z \in \mathbb{C}$.

(a) On a : $z + \overline{z} = 4 \iff \mathrm{Re}(z) = 2 \iff z \in \{2 + \mathbf{i}b, b \in \mathbb{R}\}$.
Donc l'ensemble des solution est $\{2 + \mathbf{i}b, b \in \mathbb{R}\}$ qui correspond géométriquement à la droite d'équation $x = 2$.

(b) On a : $|z - 3\mathbf{i}|^2 - |z - \mathbf{i}|^2 = (z - 3\mathbf{i})\overline{(z - 3\mathbf{i})} - (z - \mathbf{i})\overline{(z - \mathbf{i})} = |z|^2 + 3\mathbf{i} \times 2\mathbf{i}\mathrm{Im}(z) + 9 - \left(|z|^2 + \mathbf{i} \times 2\mathbf{i}\mathrm{Im}(z) + 1\right)$.
C'est-à-dire $|z - 3\mathbf{i}|^2 - |z - \mathbf{i}|^2 = -4\mathrm{Im}(z) + 8$.
Par conséquent, $|z - 3\mathbf{i}| \geqslant |z - \mathbf{i}| \iff -4\mathrm{Im}(z) + 8 \geqslant 0 \iff \mathrm{Im}(z) \leqslant 2$.
Donc l'ensemble des solution est $\{a + \mathbf{i}b, a, b \in \mathbb{R}, b \leqslant 2\}$ qui correspond géométriquement au demi plan situé au dessous de la droite d'équation $y = 2$. C'est cohérent car l'ensemble des points situés au dessous de cette droite sont à une plus petite distance du point d'affixe $\mathbf{i}$ que du point d'affixe $3\mathbf{i}$. À noter que la droite d'équation $y = 2$ est la médiatrice de ces deux points.

(c) Le complexe 0 est solution de $z^3 = \overline{z}$.
Considérons à présent que z est non nul, il existe alors un unique $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tels que $z = r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$.
On a : $z^3 = \overline{z} \iff r^3\mathbf{e}^{\mathbf{i}3\theta} = r\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta} \iff r^2\mathbf{e}^{\mathbf{i}4\theta} = 0 \iff r^2 = 1$ et $4\theta \equiv 0[2\pi] \iff r = 1$ et $\theta \equiv 0[\frac{\pi}{2}]$.
Donc l'ensemble des solution est $\{0, 1; -1; \mathbf{i}; -\mathbf{i}\}$ qui correspond géométriquement à 5 points (l'origine et les 4 points « cardinaux »).

Exercice 3 [Enoncé]

- Soit $\delta = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$.

$$\delta^2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{i}\tfrac{1}{\sqrt{2}} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ 2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{cases} \iff (a, b) = \pm\left(\sqrt{\tfrac{2+\sqrt{2}}{4}}, \sqrt{\tfrac{2-\sqrt{2}}{4}}\right).$$

  Les racines carrées de $\frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$ sont donc $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} + \mathbf{i}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ et son opposé.

- Les racines carrées de $\frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}} = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}}$ sous forme trigonométrique sont $\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{8}}$ et $-\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{8}}$.

Par identification, comme la partie réelle de $\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{8}}$ est positive, on obtient $\cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$.

Exercice 4 [Enoncé]
On a $2+\mathbf{i}\sqrt{12} = 4\left(\frac{1}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}$ donc les racines quatrièmes de $2+\mathbf{i}\sqrt{12}$ sont

$$\begin{array}{rcl} z_0 & = & \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}} \\ z_1 & = & \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}} \times \mathbf{i} = \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{7\pi}{12}} \\ z_2 & = & \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}} \times (-1) = \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{13\pi}{12}} \\ z_3 & = & \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}} \times (-\mathbf{i}) = \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{19\pi}{12}} \end{array}$$

Exercice 5 [Enoncé]
Notons (E) l'équation d'inconnue complexe z suivante : $z^3-2z^2-\mathbf{i}z+3-\mathbf{i}=0$.
Notons $P : z \mapsto z^3-2z^2-\mathbf{i}z+3-\mathbf{i}$. On remarque que $P(-1)=0$ donc -1 est solution.
Cela nous permet d'obtenir une forme factorisée de P ; $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z+1)(z^2-3z+3-\mathbf{i})$.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : z sol. de $(E) \iff P(z)=0 \iff z=-1$ ou $z^2-3z+3-\mathbf{i}=0$.
L'équation $z^2-3z+3-\mathbf{i}=0$ admet pour discriminant $\Delta = -3+4\mathbf{i}$.
Calculons les racines carrés de Δ. Soit $\delta = a+\mathbf{i}b \in \mathbb{C}$.

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2-b^2=-3 \\ 2ab=4 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2=1 \\ ab=2 \\ b^2=4 \end{cases} \iff (a,b)=(1,2) \text{ ou } (a,b)=(2,1) \iff \delta = \pm(1+2\mathbf{i}).$$

D'où l'équation $z^2-3z+3-\mathbf{i}=0$ admet 2 solutions qui sont $\frac{3+1+2\mathbf{i}}{2} = 2+\mathbf{i}$ et $\frac{3-1-2\mathbf{i}}{2} = 1-\mathbf{i}$.
Donc l'ensemble des solutions de (E) est $\{-1; 2+\mathbf{i}; 1-\mathbf{i}\}$.
Notons A, B et C les points d'affixes respectives -1, $2+\mathbf{i}$ et $1-\mathbf{i}$.
On a $AB^2 = |2+\mathbf{i}-(-1)|^2 = 3^2+1^2 = 10$; $AC^2 = |1-\mathbf{i}-(-1)|^2 = 2^2+1 = 5$ et $BC^2 = |2+\mathbf{i}-(1-\mathbf{i})|^2 = 1^2+2^2 = 5$.
D'après le théorème de Pythagore, les points A, B et C forment un triangle rectangle en C.
De plus, ce triangle est isocèle car $AC = BC$.

Exercice 6 [Enoncé] Notons $(E) : z^8+(1-3\mathbf{i})z^4-4=0$.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $Z = z^4$.
On a : z sol. de $(E) \iff Z$ sol. de $(E') : Z^2+(1-3\mathbf{i})Z-4=0$.
Or (E') admet pour discriminant $\Delta = (1-9-6\mathbf{i})+16 = 8-6\mathbf{i} = 2(4-3\mathbf{i})$.
Cherchons une racine carrée de Δ. Soit $\delta \in \mathbb{C}$. $\exists a, b \in \mathbb{R}, \delta = a+\mathbf{i}b$.

$$\Delta = \delta^2 \iff \begin{cases} a^2-b^2=8 \\ 2ab=-6 \\ a^2+b^2=10 \end{cases} \iff \begin{cases} b^2=1 \\ ab=-3 \\ a^2=9 \end{cases} \iff \begin{cases} (a,b)=(3,-1) \\ \text{ou} \\ (a,b)=(-3,1) \end{cases}$$

Donc $\delta = 3-\mathbf{i}$ est une racine carrée de Δ.
Par conséquent, les solutions de (E') sont $\frac{-1+3\mathbf{i}+3-\mathbf{i}}{2} = 1+\mathbf{i}$ et $\frac{-1+3\mathbf{i}-3+\mathbf{i}}{2} = -2+2\mathbf{i}$. z sol. de $(E) \iff Z = 1+\mathbf{i}$ ou $Z = -2+2\mathbf{i} \iff z^4 = \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$ ou $z^4 = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{4}}$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{2^{\frac{1}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{16}}; 2^{\frac{1}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{9\pi}{16}}; 2^{\frac{1}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{17\pi}{16}}; 2^{\frac{1}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{25\pi}{16}}; 2^{\frac{3}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{16}}; 2^{\frac{3}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{11\pi}{16}}; 2^{\frac{3}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{19\pi}{16}}; 2^{\frac{3}{8}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{27\pi}{16}}\right\}$$

Exercice 7 [Enoncé]
On résout ces équations par lecture sur le cercle unité. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) $\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x \in \left[-\frac{5\pi}{6}+2k\pi; -\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$;

(b) $\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\right) = 2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.
D'où

$$\begin{aligned} \cos(x)-\sqrt{3}\sin(x) = 1 \iff \cos\left(x+\tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} &\iff x+\tfrac{\pi}{3} \equiv \tfrac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x+\tfrac{\pi}{3} \equiv -\tfrac{\pi}{3}[2\pi] \\ &\iff x \equiv 0[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\tfrac{2\pi}{3}[2\pi]\ . \end{aligned}$$

(c) $\tan(x) \leqslant 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x \in \left]\frac{-\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right]$.

Exercice 8 [Enoncé]
Soit $z \in \mathbb{C}$.
On a $\mathbf{e}^z + \mathbf{e}^{-z} = 1 \iff \mathbf{e}^{2z} - \mathbf{e}^z + 1 = 0$.
Posons $Z = \mathbf{e}^z$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^z + \mathbf{e}^{-z} = 1 &\iff Z^2 - Z + 1 = 0 \\
&\iff Z \in \left\{ \frac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2} ; \frac{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}{2} \right\} \\
&\iff \mathbf{e}^z = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} \text{ ou } \mathbf{e}^z = \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} \\
&\iff z \equiv \mathbf{i}\tfrac{\pi}{3}[2\mathbf{i}\pi] \text{ ou } z \equiv -\mathbf{i}\tfrac{\pi}{3}[2\mathbf{i}\pi] \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = \mathbf{i}\left(\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, z = \mathbf{i}\left(-\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right)
\end{aligned}$$

Exercice 9 [Enoncé]
Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) $\cos(5x) - \cos(x) = \operatorname{Re}\left(\mathbf{e}^{5\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}x}\right) = \operatorname{Re}\left(\mathbf{e}^{3\mathbf{i}x}\left(\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-2\mathbf{i}x}\right)\right) = 2\sin(2x)\operatorname{Re}\left(\mathbf{e}^{3\mathbf{i}x}\mathbf{i}\right) = -2\sin(2x)\sin(3x)$.
Par conséquent,

$$\cos(5x) = \cos(x) \iff \sin(2x) = 0 \text{ ou } \sin(3x) = 0 \iff 2x \equiv 0[\pi] \text{ ou } 3x \equiv 0[\pi] \iff x \equiv 0\left[\tfrac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x \equiv 0\left[\tfrac{\pi}{3}\right]$$

(b) $\sin(x) + \sin(3x) = \operatorname{Im}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{3\mathbf{i}x}\right) = \operatorname{Im}\left(\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x} \times 2\cos(x)\right) = 2\cos(x)\sin(2x)$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0 &\iff (2\cos(x) + 1)\sin(2x) = 0 \iff \cos(x) = -\tfrac{1}{2} \text{ ou } \sin(2x) = 0 \\
&\iff x \equiv \tfrac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\tfrac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x \equiv 0\left[\tfrac{\pi}{2}\right] \\
&\iff x \equiv 0[\tfrac{2\pi}{3}] \text{ ou } x \equiv 0\left[\tfrac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

Exercice 10 [Enoncé]
Modélisons un triangle quelconque inscrit dans le cercle unité et dont un sommet est d'affixe 1.
Pour cela, notons A, B et C les points d'affixes respectives 1, $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ et $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\varphi}$ où $\theta, \varphi \in]0, 2\pi[$ tels que $\theta < \varphi$.
Il reste à trouver les paramètres θ et φ pour lesquels le triangle ABC est équilatéral.
Or ABC est équilatéral si et seulement si $AB = AC$ et une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est $\frac{\pi}{3}$.
Autrement dit, ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\varphi}-1}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}-1}$ est de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ module 2π.
Or, à l'aide de deux factorisation par l'angle moitié et en utilisant le fait que $\frac{\varphi}{2}, \frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\varphi}-1}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}-1} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\varphi-\theta}{2}}$ est de module $\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et d'argument $\frac{\varphi-\theta}{2}$ modulo 2π. Donc

$$\begin{aligned}
ABC \text{ est équilatéral} &\iff \sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \text{ et } \tfrac{\varphi-\theta}{2} \equiv \tfrac{\pi}{3}[2\pi] \\
&\underset{\varphi>\theta}{\iff} \tfrac{\varphi}{2} = \pi - \tfrac{\theta}{2} \text{ et } \varphi - \theta = \tfrac{2\pi}{3} \\
&\iff \varphi + \theta = 2\pi \text{ et } \varphi - \theta = \tfrac{4\pi}{3} \\
&\iff \varphi = \tfrac{4\pi}{3} \text{ et } \theta = \tfrac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

Autrement dit, ABC est équilatéral si et seulement si B et C sont d'affixes j et j^2 respectivement.