

Chapitre 2 : Nombres complexes et trigonométrie

★ Passer de l'écriture algébrique à l'écriture trigonométrique et inversement.

Exercice 1 [Solution]

Soit $z_1 = \sqrt{3} - \mathbf{i}$ et $z_2 = 1 + \mathbf{i}$.

Après avoir calculé $z = \frac{z_1}{z_2}$, donner la valeur exacte de $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

★ Manipuler conjugué, module et arguments afin d'obtenir des interprétations géométriques.

Exercice 2 [Solution]

Sans utiliser d'écriture algébrique, résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue complexe z puis donner une interprétation géométrique de l'ensemble des solutions :

(a) $z + \bar{z} = 4$.

(b) $|z - 3\mathbf{i}| \geq |z - \mathbf{i}|$.

(c) $z^3 = \bar{z}$.

★ Déterminer les racines carrées d'un complexe écrit sous forme algébrique.

Exercice 3 [Solution]

Déterminer les racines carrées de $\frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$ en utilisant uniquement des écritures algébriques puis uniquement des écritures trigonométriques. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

★ Déterminer les racines n -ième d'un complexe écrit sous forme trigonométrique.

Exercice 4 [Solution]

Déterminer les racines quatrièmes de $2 + \mathbf{i}\sqrt{12}$.

★ Résoudre des équations polynomiales de la variable complexe.

Exercice 5 [Solution]

Résoudre l'équation $z^3 - 2z^2 - \mathbf{i}z + 3 - \mathbf{i} = 0$ d'inconnue complexe z .

Montrer que les points images des solutions forment un triangle rectangle et isocèle.

Exercice 6 [Solution]

Résoudre l'équation $z^8 + (1 - 3\mathbf{i})z^4 - 4 = 0$ d'inconnue complexe z .

★ Résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.

Exercice 7 [Solution]

Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue réelle x :

(a) $\sin(x) \leq -\frac{1}{2}$;

(b) $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$;

(c) $\tan(x) \leq 1$.

★ Résoudre des équations comprenant de l'exponentielle complexe.

Exercice 8 [Solution]

Résoudre l'équation $e^z + e^{-z} = 1$ d'inconnue complexe z .

★ Factorisation par l'angle moitié afin de retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Exercice 9 [Solution]

Résoudre les deux équations suivantes d'inconnue réelle x :

(a) $\cos(x) = \cos(5x)$;

(b) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.

★ Résoudre des problèmes géométriques en utilisant le module ou un argument de $\frac{c-a}{b-a}$.

Exercice 10 [Solution]

Montrer qu'il existe un unique triangle équilatéral, inscrit dans le cercle unité et dont un sommet est d'affixe 1.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]

Soit $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 1 + i$.

Forme algébrique de z

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1}{z_2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - i}{1 + i} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\ &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}i - i - 1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1 - i(\sqrt{3} + 1)}{2} \\ \boxed{z = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - i \frac{\sqrt{3} + 1}{2}} \quad (1) \end{aligned}$$

Forme trigonométrique de z

$$\begin{aligned} \text{D'une part, } z_1 &= \sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2 e^{-i \frac{\pi}{6}} \\ \text{D'autre part, } z_2 &= 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \\ \text{Par conséquent, } z &= \frac{z_1}{z_2} \\ &= \frac{2 e^{-i \frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}} \\ &= \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{6}} e^{-i \frac{\pi}{4}} \\ \boxed{z = \sqrt{2} e^{-i \frac{5\pi}{12}}} \\ \text{i.e. } z &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12} \right) \quad (2) \end{aligned}$$

De plus, $\sin \left(\frac{11\pi}{12} \right) = \sin \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{6\pi}{12} \right) = \sin \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{5\pi}{12} \right)$.

Or par identification des parties réelles dans (1) et (2), on en déduit que $\sqrt{2} \cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

D'où, $\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

Donc $\sin \left(\frac{11\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 2 [Enoncé]

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- (a) On a : $z + \bar{z} = 4 \iff \text{Re}(z) = 2 \iff z \in \{2 + ib, b \in \mathbb{R}\}$.
Donc l'ensemble des solution est $\{2 + ib, b \in \mathbb{R}\}$ qui correspond géométriquement à la droite d'équation $x = 2$.
- (b) On a : $|z - 3i|^2 - |z - i|^2 = (z - 3i)(\overline{z - 3i}) - (z - i)(\overline{z - i}) = |z|^2 + 3i \times 2i \text{Im}(z) + 9 - (|z|^2 + i \times 2i \text{Im}(z) + 1)$.
C'est-à-dire $|z - 3i|^2 - |z - i|^2 = -4 \text{Im}(z) + 8$.
Par conséquent, $|z - 3i| \geq |z - i| \iff -4 \text{Im}(z) + 8 \geq 0 \iff \text{Im}(z) \leq 2$.
Donc l'ensemble des solution est $\{a + ib, a, b \in \mathbb{R}, b \leq 2\}$ qui correspond géométriquement au demi plan situé au dessous de la droite d'équation $y = 2$. C'est cohérent car l'ensemble des points situés au dessous de cette droite sont à une plus petite distance du point d'affixe i que du point d'affixe $3i$. À noter que la droite d'équation $y = 2$ est la médiatrice de ces deux points.
- (c) Le complexe 0 est solution de $z^3 = \bar{z}$.
Considérons à présent que z est non nul, il existe alors un unique $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tels que $z = r e^{i\theta}$.
On a : $z^3 = \bar{z} \iff r^3 e^{i3\theta} = r e^{-i\theta} \iff r^2 e^{i4\theta} = 1 \iff r^2 = 1$ et $4\theta \equiv 0[2\pi] \iff r = 1$ et $\theta \equiv 0[\frac{\pi}{2}]$.
Donc l'ensemble des solution est $\{0, 1; -1; i; -i\}$ qui correspond géométriquement à 5 points (l'origine et les 4 points « cardinaux »).

Exercice 3 [Enoncé]

- Soit $\delta = a + ib \in \mathbb{C}$.

$$\delta^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ 2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{cases} \iff (a, b) = \pm \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}, \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \right).$$

Les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ sont donc $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} + i \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ et son opposé.

- Les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i \frac{\pi}{4}}$ sous forme trigonométrique sont $e^{i \frac{\pi}{8}}$ et $-e^{i \frac{\pi}{8}}$.

Par identification, comme la partie réelle de $e^{\frac{i\pi}{8}}$ est positive, on obtient $\cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$.

Exercice 4 [Enoncé]

On a $2 + i\sqrt{12} = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc les racines quatrièmes de $2 + i\sqrt{12}$ sont

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{4}e^{i\frac{\pi}{12}} \\ z_1 &= \sqrt[4]{4}e^{i\frac{\pi}{12}} \times i = \sqrt[4]{4}e^{i\frac{7\pi}{12}} \\ z_2 &= e^{i\frac{\pi}{12}} \times (-1) = \sqrt[4]{4}e^{i\frac{13\pi}{12}} \\ z_3 &= e^{i\frac{\pi}{12}} \times (-i) = \sqrt[4]{4}e^{i\frac{19\pi}{12}} \end{aligned}$$

Exercice 5 [Enoncé]

Notons (E) l'équation d'inconnue complexe z suivante : $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$.

Notons $P : z \mapsto z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i$. On remarque que $P(-1) = 0$ donc -1 est solution.

Cela nous permet d'obtenir une forme factorisée de P ; $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z + 1)(z^2 - 3z + 3 - i)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : z sol. de $(E) \iff P(z) = 0 \iff z = -1$ ou $z^2 - 3z + 3 - i = 0$.

L'équation $z^2 - 3z + 3 - i = 0$ admet pour discriminant $\Delta = -3 + 4i$.

Calculons les racines carrées de Δ . Soit $\delta = a + ib \in \mathbb{C}$.

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ ab = 2 \\ b^2 = 4 \end{cases} \iff (a, b) = (1, 2) \text{ ou } (a, b) = (2, 1) \iff \delta = \pm(1 + 2i).$$

D'où l'équation $z^2 - 3z + 3 - i = 0$ admet 2 solutions qui sont $\frac{3+1+2i}{2} = 2 + i$ et $\frac{3-1-2i}{2} = 1 - i$.

Donc l'ensemble des solutions de (E) est $\{-1; 2 + i; 1 - i\}$.

Notons A, B et C les points d'affixes respectives $-1, 2 + i$ et $1 - i$.

On a $AB^2 = |2+i - (-1)|^2 = 3^2 + 1^2 = 10$; $AC^2 = |1-i - (-1)|^2 = 2^2 + 1 = 5$ et $BC^2 = |2+i - (1-i)|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$.

D'après le théorème de Pythagore, les points A, B et C forment un triangle rectangle en C .

De plus, ce triangle est isocèle car $AC = BC$.

Exercice 6 [Enoncé] Notons $(E) : z^8 + (1 - 3i)z^4 - 4 = 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $Z = z^4$.

On a : z sol. de $(E) \iff Z$ sol. de $(E') : Z^2 + (1 - 3i)Z - 4 = 0$.

Or (E') admet pour discriminant $\Delta = (1 - 9 - 6i) + 16 = 8 - 6i = 2(4 - 3i)$.

Cherchons une racine carrée de Δ . Soit $\delta \in \mathbb{C}$. $\exists a, b \in \mathbb{R}, \delta = a + ib$.

$$\Delta = \delta^2 \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} b^2 = 1 \\ ab = -3 \\ a^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} (a, b) = (3, -1) \\ \text{ou} \\ (a, b) = (-3, 1) \end{cases}$$

Donc $\delta = 3 - i$ est une racine carrée de Δ .

Par conséquent, les solutions de (E') sont $\frac{-1+3i+3-i}{2} = 1 + i$ et $\frac{-1+3i-3-i}{2} = -2 + 2i$. z sol. de $(E) \iff Z = 1 + i$ ou $Z = -2 + 2i \iff z^4 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $z^4 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{\pi}{16}}; 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{9\pi}{16}}; 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{17\pi}{16}}; 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{25\pi}{16}}; 2^{\frac{3}{8}}e^{i\frac{3\pi}{16}}; 2^{\frac{3}{8}}e^{i\frac{11\pi}{16}}; 2^{\frac{3}{8}}e^{i\frac{19\pi}{16}}; 2^{\frac{3}{8}}e^{i\frac{27\pi}{16}} \right\}$$

Exercice 7 [Enoncé]

On résout ces équations par lecture sur le cercle unité. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) $\sin(x) \leq -\frac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x \in \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$;

(b) $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

D'où

$$\begin{aligned} \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1 &\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \iff x + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \\ &\iff x \equiv 0[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi] . \end{aligned}$$

(c) $\tan(x) \leq 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$.

Exercice 8 [Enoncé]

Soit $z \in \mathbb{C}$.

On a $e^z + e^{-z} = 1 \iff e^{2z} - e^z + 1 = 0$.

Posons $Z = e^z$. On a :

$$\begin{aligned} e^z + e^{-z} = 1 &\iff Z^2 - Z + 1 = 0 \\ &\iff Z \in \left\{ \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right\} \\ &\iff e^z = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } e^z = e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &\iff z \equiv i\frac{\pi}{3}[2i\pi] \text{ ou } z \equiv -i\frac{\pi}{3}[2i\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, z = i\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \end{aligned}$$

Exercice 9 [Enoncé]

Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) $\cos(5x) - \cos(x) = \operatorname{Re}(e^{5ix} - e^{ix}) = \operatorname{Re}(e^{3ix}(e^{2ix} - e^{-2ix})) = 2\sin(2x)\operatorname{Re}(e^{3ix}i) = -2\sin(2x)\sin(3x)$.

Par conséquent,

$$\cos(5x) = \cos(x) \iff \sin(2x) = 0 \text{ ou } \sin(3x) = 0 \iff 2x \equiv 0[\pi] \text{ ou } 3x \equiv 0[\pi] \iff x \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x \equiv 0\left[\frac{\pi}{3}\right]$$

(b) $\sin(x) + \sin(3x) = \operatorname{Im}(e^{ix} + e^{3ix}) = \operatorname{Im}(e^{2ix} \times 2\cos(x)) = 2\cos(x)\sin(2x)$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0 &\iff (2\cos(x) + 1)\sin(2x) = 0 \iff \cos(x) = -\frac{1}{2} \text{ ou } \sin(2x) = 0 \\ &\iff x \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right] \\ &\iff x \equiv 0\left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } x \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

Exercice 10 [Enoncé]

Modélisons un triangle quelconque inscrit dans le cercle unité et dont un sommet est d'affixe 1.

Pour cela, notons A, B et C les points d'affixes respectives 1, $e^{i\theta}$ et $e^{i\varphi}$ où $\theta, \varphi \in]0, 2\pi[$ tels que $\theta < \varphi$.

Il reste à trouver les paramètres θ et φ pour lesquels le triangle ABC est équilatéral.

Or ABC est équilatéral si et seulement si $AB = AC$ et une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $\frac{\pi}{3}$.

Autrement dit, ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{e^{i\varphi}-1}{e^{i\theta}-1}$ est de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π .

Or, à l'aide de deux factorisation par l'angle moitié et en utilisant le fait que $\frac{\varphi}{2}, \frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{e^{i\varphi}-1}{e^{i\theta}-1} = \frac{\sin(\frac{\varphi}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} e^{i\frac{\varphi-\theta}{2}}$ est

de module $\frac{\sin(\frac{\varphi}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$ et d'argument $\frac{\varphi-\theta}{2}$ modulo 2π . Donc

$$\begin{aligned} ABC \text{ est équilatéral} &\iff \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \frac{\varphi-\theta}{2} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \\ &\iff \begin{matrix} \varphi > \theta \\ \frac{\varphi}{2} = \pi - \frac{\theta}{2} \text{ et } \varphi - \theta = \frac{2\pi}{3} \end{matrix} \\ &\iff \varphi + \theta = 2\pi \text{ et } \varphi - \theta = \frac{4\pi}{3} \\ &\iff \varphi = \frac{4\pi}{3} \text{ et } \theta = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Autrement dit, ABC est équilatéral si et seulement si B et C sont d'affixes j et j^2 respectivement.