Chapitre 19 : Applications linéaires

★ Montrer qu'une application linéaire est injective (resp. surjective) en étudiant son noyau (resp. image).

Exercice 1 [Solution]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $f : P \mapsto P'$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

★ Utiliser, sous certaines hypothèses sur les dimensions, l'équivalence entre injectivité et surjectivité.

Exercice 2 [Solution]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $XP' + P(0) = (X+1)^n$.

★ Manipuler noyau et image d'une application linéaire dans un exercice théorique.

Exercice 3 [Solution]
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
2. On suppose que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ et que E est de dimension finie.
   Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E.

★ Montrer qu'un endomorphisme est une projection ou une symétrie et déterminer ses sous-espaces caractéristiques.

Exercice 4 [Solution]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons f l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $f : M \mapsto M^T$.
Montrer que f est une symétrie et déterminer ses sous-espaces caractéristiques.

★ Déterminer l'expression d'une projection ou d'une symétrie en connaissant ses sous-espaces caractéristiques.

Exercice 5 [Solution]
Déterminer une expression explicite de la symétrie de $\mathbb{R}_2[X]$ par rapport à $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(X^2+1)$.

★ Résoudre une équation linéaire.

Exercice 6 [Solution]
Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P(-1) = P(0) = P(1) = 1$ et $P'(-1) = P'(0) = P'(1) = 0$.
On pourra voir ce problème comme la résolution d'une équation linéaire en introduisant l'application linéaire définie sur $\mathbb{K}[X]$ *à valeurs dans* $\mathbb{K}^6$ *par* $f : P \mapsto (P(-1), P(0), P(1), P'(-1), P'(0), P'(1))$.

★ Reconnaître un hyperplan et un supplémentaire de celui-ci.

Exercice 7 [Solution]
Montrer que toute fonction continue se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction d'intégrale nulle sur $[0,1]$ et d'une fonction proportionnelle à la fonction carré.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
$\mathrm{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{K}_n[X], P' = 0\} = \mathbb{K}_0[X] \neq \{0\}$. Par conséquent, f n'est pas injective.
$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), \ldots, f(X^n)) = \mathrm{Vect}(0, 1, \ldots, nX^{n-1}) = \mathbb{K}_{n-1}[X] \neq \mathbb{K}_n[X]$. Par conséquent, f n'est pas surjective.
À noter que l'on pouvait déduire un point de l'autre car f est un endomorphisme en dimension finie.

Exercice 2 [Enoncé]
Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ suivant $f : P \mapsto XP' + P(0)$.
Le problème revient à montrer que $(X+1)^n$ admet un antécédent par f. Montrons plus généralement que f est surjective. Comme f est un endomorphisme en dimension finie, il suffit de montrer que f est injective et donc de montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. L'inclusion retour est triviale.
Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $XP' + P(0) = 0$. En évaluant cette égalité en 0, $P(0) = 0$. Par conséquent, $XP' = 0$ et comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre, $P' = 0$ donc P est constant. Or $P(0) = 0$, donc P est le polynôme nul.
L'application f est injective donc surjective (car les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont finies et égales).
Par conséquent, $(X+1)^n$ admet un antécédent par f i.e. il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $XP' + P(0) = (X+1)^n$.

Exercice 3 [Enoncé]

1. Raisonnons par double inclusion.
   $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. Montrons que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
   - $\boxed{\supset}$ Trivial car $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels.
   - $\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. Il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$.
     On a $f^2(z) = f(x) = 0$ d'où $z \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, $f(z) = 0$ i.e. $x = 0$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
   - $\boxed{\subset}$ Trivial.
   - $\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Notons $y = f(x)$. Alors $y \in \mathrm{Im}(f)$. De plus, $f(y) = f^2(x) = 0$ ainsi $y \in \mathrm{Ker}(f)$.
     Par conséquent, $y = f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ d'où $f(x) = 0$ i.e. $x \in \mathrm{Ker}(f)$.
2. On suppose que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ et que E est de dimension finie.
   D'après le point précédent, $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
   De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$.
   D'après la caractérisation des supplémentaires en dimension finie, $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$.

Exercice 4 [Enoncé]
On remarque tout d'abord que f est bien un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
De plus, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f \circ f(M) = f(M^T) = M$.
Donc s est une symétrie par rapport à

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), f(M) - M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), M = M^T\} = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$$

parallèlement à

$$\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), f(M) + M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), M = -M^T\} = \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \, .$$

Exercice 5 [Enoncé]
Montrons tout d'abord que $\mathbb{R}_1[X]$ et $\mathrm{Vect}(X^2+1)$ sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$ à l'aide d'une analyse-synthèse. De plus, cela nous permettra de déterminer la décomposition d'un élément quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$ comme somme d'élément de ses deux sous-espaces et donc de déterminer une expression explicite de la symétrie par rapport à $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(X^2+1)$.
Soit $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$.
Analyse : Supposons qu'il existe $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_1[X] \times \mathrm{Vect}(X^2+1)$ tel que $P = P_1 + P_2$.
Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $P_1 = aX + b$ et $P_2 = c(X^2+1)$. D'où $cX^2 + aX + b + c = a_2X^2 + a_1X + a_0$.
Par identification des coefficients, $c = a_2$, $a = a_1$ et $b = a_0 - a_2$ i.e. $P_1 = a_1X + a_0 - a_2$ et $P_2 = a_2(X^2+1)$.
Synthèse : Posons $P_1 = a_1X + a_0 - a_2$ et $P_2 = a_2(X^2+1)$.
On a $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_1[X] \times \mathrm{Vect}(X^2+1)$ et $P = P_1 + P_2$.
Conclusion : $\mathbb{R}_1[X] \oplus \mathrm{Vect}(X^2+1) = \mathbb{R}_2[X]$.
Notons s la symétrie de $\mathbb{R}_2[X]$ par rapport à $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(X^2+1)$.
Pour tout $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$, $s(P) = a_1X + a_0 - a_2 - (a_2(X^2+1)) = -a_2X^2 + a_1X + a_0 - 2a_2$.

Exercice 6 [Enoncé]
Notons $f : P \mapsto (P(-1), P(0), P(1), P'(-1), P'(0), P'(1))$ l'application linéaire définie sur $\mathbb{K}[X]$ à valeurs dans $\mathbb{K}^6$. Le problème consiste à résoudre l'équation linéaire suivante :

$$(E) : f(P) = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$$

On constate que le polynôme constant à 1 est solution de (E). De plus,

$$\mathrm{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{K}[X], P(-1) = P(0) = P(1) = P'(-1) = P'(0) = P'(1) = 0\} = \{(X-1)^2X^2(X+1)^2Q, Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

Autrement dit, $\mathrm{Ker}(f) = \{(X^3 - X)^2Q, Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{1 + (X^3 - X)^2Q, Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

Exercice 7 [Enoncé]
Notons $H = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\}$. L'ensemble H est un hyperplan de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet, c'est le noyau de l'application $\varphi : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ qui est une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Par conséquent, toute droite vectorielle non contenue dans H forme un supplémentaire de H dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Par exemple, comme $\displaystyle\int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3} \neq 0$, $\mathrm{Vect}(x \mapsto x^2)$ est un supplémentaire de H dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Autrement dit, toute fonction continue se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction d'intégrale nulle sur $[0, 1]$ et d'une fonction proportionnelle à la fonction carré.