Chapitre 18 : Dimension

★ Construire une base en utilisant le théorème de la base extraite ou incomplète.

Exercice 1 [Solution]
Déterminer une base de $\mathrm{Vect}(X^3+1, X(X+1), (X+1)^3)$.
Compléter ensuite cette famille en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

★ Montrer par l'absurde qu'un espace est de dimension infinie via le lemme de la dimension.

Exercice 2 [Solution]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des n premiers nombres premiers.
Montrer que la famille $(\ln(p))_{p\in\mathcal{P}_n}$ est libre dans $\mathbb{R}$ vu comme un $\mathbb{Q}$-ev.
En déduire que $\mathbb{R}$ est de dimension infinie si on le considère comme un $\mathbb{Q}$-ev.

★ Montrer qu'une famille est une base en montrant qu'elle est libre (ou génératrice) et de bon cardinal.

Exercice 3 [Solution]
Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, notons $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$.
Montrer que la famille $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

★ Montrer que deux s.e.v. sont égaux en montrant que l'un est inclus dans l'autre et qu'ils ont la même dimension.

Exercice 4 [Solution]
Soit $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\{P \in \mathbb{K}_n[X],\ P(a) = 0\} = \mathrm{Vect}(X-a, \ldots, (X-a)^n)$.

★ Déterminer la dimension d'une intersection en s'aidant de la formule de Grassman.

Exercice 5 [Solution]
Considérons $F = \mathrm{Vect}\left((1,0,0,0),(1,2,0,0)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left((3,1,1,1),(4,4,1,1),(1,5,5,0)\right)$. Déterminer $F \cap G$.

★ Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en utilisant la caractérisation en dimension finie.

Exercice 6 [Solution]
Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X^2) = X^2P(X)\}$ et $\{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P(2)\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
Notons $F = \text{Vect}(X^3+1, X(X+1), (X+1)^3)$.
La famille $(X^3+1, X(X+1), (X+1)^3)$ est donc génératrice de F, on va en extraire une base.
On a $(X+1)^3 = X^3 + 3X(X+1)$. D'où $F = \text{Vect}(X^3+1, X(X+1))$.
La famille $(X^3+1, X(X+1))$ est libre et génératrice de F, c'est donc une base de F.
La famille $(X^3+1, X(X+1))$ est une famille libre d'éléments de $\mathbb{R}_3[X]$. On va la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$ à l'aide de la famille génératrice $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. On a $1 \notin F$ d'où $(X^3+1, X(X+1), 1)$ est une famille libre. De plus, $X \notin \text{Vect}(X^3+1, X(X+1), 1)$ d'où $(X^3+1, X(X+1), 1, X)$ est une famille libre composée de $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$ vecteurs. Par conséquent, $(X^3+1, X(X+1), 1, X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2 [Enoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{P}_n = \{p_1, \ldots, p_n\}$ l'ensemble des n premiers nombres premiers.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(p_i) = 0$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $(a_i, b_i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda_i = \frac{a_i}{b_i}$.
En multipliant, l'égalité ci-dessus par $\displaystyle\prod_{i=1}^n b_i$ et en notant $\mu_i = \lambda_i \displaystyle\prod_{i=1}^n b_i \in \mathbb{Z}$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^n \mu_i \ln(p_i) = 0$ i.e. $\displaystyle\prod_{i=1}^n p_i^{\mu_i} = 1$.
Notons $A = \{i \in [\![1, n]\!], \mu_i \geqslant 0\}$, on a $\displaystyle\prod_{i\in A}^n p_i^{\mu_i} \prod_{i\in \overline{A}}^n p_i^{\mu_i} = 1$ i.e. $\displaystyle\prod_{i\in A}^n p_i^{\mu_i} = \prod_{i\in \overline{A}}^n p_i^{-\mu_i}$.
Nous avons ici deux décompositions en produit de nombre premiers d'un même entier naturel. Or cette décomposition est unique, par conséquent $\mu_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
La famille $(\ln(p))_{p\in\mathcal{P}_n}$ est libre dans $\mathbb{R}$ vu comme un $\mathbb{Q}$-ev.
Par l'absurde, supposons que $\mathbb{R}$ vu comme un $\mathbb{Q}$-ev est de dimension finie, notons $n = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$. La famille $(\ln(p))_{p\in\mathcal{P}_{n+1}}$ composée de $n+1$ éléments est libre dans cet espace. Absurde.
Donc $\mathbb{R}$ est de dimension infinie si on le considère comme un $\mathbb{Q}$-ev.

Exercice 3 [Enoncé]
Soit $a, b \in \mathbb{K}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = (X-a)^k (X-b)^{n-k}$ est un polynôme de degré n.
Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0$. Il est intéressant de remarquer que a est racine de P_k de multiplicité k pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Par conséquent, $P_k^{(k)}(a) = 0$ et $P_k^{(k+1)}(a) \neq 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
On évalue $\displaystyle\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0$ en a ce qui donne $\lambda_0 \underbrace{P_0(a)}_{\neq 0} = 0$ d'où $\lambda_0 = 0$.
En dérivant l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k P_k = 0$ et en évaluant en a, on a $\lambda_1 \underbrace{P_1'(a)}_{\neq 0} = 0$ d'où $\lambda_1 = 0$.
On répète le procédé pour montrer que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
La famille $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$ composée de $n+1 = \deg(\mathbb{K}_n[X])$ éléments.
Par conséquent, $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 4 [Enoncé]
Soit $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
La famille $(X-a, \ldots, (X-a)^n)$ est libre (car de degrés échelonnés) et génératrice de $\text{Vect}(X-a, \ldots, (X-a)^n)$. C'est donc une base de $\text{Vect}(X-a, \ldots, (X-a)^n)$. Ce dernier ensemble est donc un sev de $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension n.
Montrons que $F := \{P \in \mathbb{K}_n[X],\ P(a) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{K}_n[X]$.

- $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.
- $0 \in F$.
- $\forall P, Q \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, (P + \lambda Q)(a) = P(a) + \lambda Q(a) = 0 + \lambda.0 = 0$ d'où $P + \lambda Q \in F$.

De plus,
$$\text{Vect}(X-a, \ldots, (X-a)^n) \subset \{P \in \mathbb{K}_n[X],\ P(a) = 0\} \subsetneq \mathbb{K}_n[X]$$
En passant aux dimensions, $n \leqslant \dim(F) < n+1$ d'où $\dim(F) = n$.
On a $\text{Vect}(X-a, \ldots, (X-a)^n) \subset \{P \in \mathbb{K}_n[X],\ P(a) = 0\}$ et ces deux sous-espaces vectoriels sont de même dimension donc ils sont égaux.

Exercice 5 [Enoncé]
On a $F = \text{Vect}\left((1,0,0,0),(1,2,0,0)\right)$ et $G = \text{Vect}\left((3,1,1,1),(4,4,1,1),(1,5,5,0)\right)$.
Ces familles qui génèrent F et G respectivement sont libres, elles forment donc des bases respectives de ces espaces.
On a $(1,0,0,0),(1,2,0,0),(1,5,5,0),(4,4,1,1) \in F+G$.
Or ces 4 vecteurs forment une famille libre (car échelonnée) d'où $\dim(F+G) \geqslant 4$.
Or $F+G \subset \mathbb{R}^4$, d'où $\dim(F+G) = 4$.
D'après la formule de Grassmann, $\dim(F \cap G) = 2+3-4 = 1$.
Or $(1,3,0,0) = (4,4,1,1)-(3,1,1,1) \in G$ et $(1,3,0,0) = \frac{3}{2}(1,2,0,0) - \frac{1}{2}(1,0,0,0) \in F$.
D'où $F \cap G = \text{Vect}\left((1,3,0,0)\right)$.

Exercice 6 [Enoncé]
Montrons que $F := \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X^2) = X^2P(X)\}$ et $G := \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P(2)\}$ sont deux sous-espaces vectoriels en les écrivant comme des espaces vectoriels engendrés.

$$\begin{aligned}
\{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X^2) = X^2P(X)\} &= \{aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{R}_3[X], aX^6+bX^4+cX^2+d = aX^5+bX^4+cX^3+dX^2\} \\
&= \{aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{R}_3[X], a=c=d=0\} \\
&= \{bX^2, b \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Vect}(X^2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P(2)\} &= \{aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{R}_3[X], a+b+c+d = 8a+4b+2c+d\} \\
&= \{aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{R}_3[X], c = -7a-3b\} \\
&= \{aX^3+bX^2+(-7a-3b)X+d, a,b,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a(X^3-7X)+b(X^2-3X)+d, a,b,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Vect}(X^3-7X, X^2-3X, 1)
\end{aligned}$$

Les familles (X^2) et $(X^3-7X, X^2-3X, 1)$ sont libres (car de degrés échelonnés) donc forment des bases respectives de F et G. Par conséquent, $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = 3$.
Montrons à présent que la somme $F+G$ est directe en montrant par double inclusion que $F \cap G = \{0\}$.
L'inclusion retour est triviale.
Considérons à présent $P \in F \cap G$. Comme $P \in F$, $\exists \lambda \in \mathbb{K}, P = \lambda X^2$.
Et comme $P \in G$, $P(1) = P(2)$ i.e. $\lambda = 4\lambda$ i.e. $\lambda = 0$ donc $P = 0$.
Par conséquent, $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F)+\dim(G) = 1+3 = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$.
D'après la caractérisation des supplémentaires en dimension finie, $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.