Chapitre 17 : Espaces vectoriels

★ Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel en montrant que c'est un sous-espace vectoriel d'un e.v. connu.

Exercice 1 [Solution]
Notons $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.
Montrer que H (muni de la somme et de la multiplication externe usuelles sur les polynômes) est un espace vectoriel.

★ Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel en l'écrivant comme un sous-espace vectoriel engendré.

Exercice 2 [Solution]
Notons $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.
Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer une base de H.

★ Montrer qu'une somme de deux sous-espaces vectoriels est directe en utilisant la caractérisation par l'intersection.

Exercice 3 [Solution]
Notons $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$. Montrer que H est en somme directe avec $\text{Vect}(X + 1)$.

★ Montrer que deux espaces sont supplémentaires grâce à une analyse-synthèse.

Exercice 4 [Solution]
Notons $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$. Montrer que H et $\text{Vect}(X + 1)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

★ Montrer qu'une famille est libre en utilisant des outils comme la dérivation, l'évaluation, ...

Exercice 5 [Solution]
Montrer, de trois façons différentes, que la famille $(X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
Montrons que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

- $H \subset \mathbb{R}_3[X]$ où $\mathbb{R}_3[X]$ est un espace vectoriel.
- Le polynôme nul évalué en 1 donne 0 donc $0 \in H$.
- Soit $P, Q \in H$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  $(P + \lambda Q)(1) = P(1) + \lambda Q(1) = 0 + \lambda \times 0 = 0$. Par conséquent, $P + \lambda Q \in H$.

Conclusion : H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, H est donc un espace vectoriel.

Exercice 2 [Enoncé]
Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On peut l'écrire $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
$P \in H \Leftrightarrow a + b + c + d = 0 \Leftrightarrow P = aX^3 + bX^2 + cX + (-a - b - c) \Leftrightarrow P = a(X^3 - 1) + b(X^2 - 1) + c(X - 1)$.
On a donc $H = \mathrm{Vect}(X^3 - 1, X^2 - 1, X - 1)$. On en déduit que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ (donc un espace vectoriel) et que $(X^3 - 1, X^2 - 1, X - 1)$ forme une famille génératrice de H. De plus, cette famille est échelonnée en degré, par conséquent elle est libre, c'est donc une base de H.

Exercice 3 [Enoncé]
Montrons que $H \cap \mathrm{Vect}(X + 1) = \{0\}$ par double inclusion.
L'inclusion retour est triviale car H et $\mathrm{Vect}(X + 1)$ sont des sous-espaces vectoriels.
Soit $P \in H \cap \mathrm{Vect}(X + 1)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda(X + 1)$. Or $P(1) = 0$ i.e. $\lambda \times 2 = 0$ d'où $P = 0$.
D'après la caractérisation de la somme directe de deux sous-espaces, H et $\mathrm{Vect}(X + 1)$ sont en somme directe.

Exercice 4 [Enoncé]
Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
Analyse : Supposons qu'il existe $(A, B) \in H \times \mathrm{Vect}(X + 1)$ tel que $P = A + B$.
D'où, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = \lambda(X + 1)$.
En évaluant en 1 l'égalité $P = A + B$, on obtient $P(1) = A(1) + B(1)$ i.e. $P(1) = 2\lambda$ i.e. $\lambda = \frac{1}{2}P(1)$. Par conséquent, $B = \frac{1}{2}P(1)(X + 1)$ et $A = P - \frac{1}{2}P(1)(X + 1)$.
Synthèse : Posons $A = P - \frac{1}{2}P(1)(X + 1)$ et $B = \frac{1}{2}P(1)(X + 1)$.
On a $A + B = P$, $B \in \mathrm{Vect}(X + 1)$ et $A(1) = P(1) - \frac{1}{2} \times P(1) \times 2 = 0$ d'où $A \in H$.
Conclusion : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \exists!(A, B) \in H \times \mathrm{Vect}(X + 1), P = A + B$ i.e. $H \oplus \mathrm{Vect}(X + 1) = \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 5 [Enoncé]
Première méthode :
La famille $(X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est une famille de polynômes échelonnés en degré, donc elle est libre.
Deuxième méthode :
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$. Supposons que $\lambda_1(X - 1) + \lambda_2(X - 1)^2 + \lambda_3(X - 1)^3 = 0$.
Comme $\mathbb{K}[X]$ est intègre, on peut simplifier par $(X - 1)$ pour trouver $\lambda_1 + \lambda_2(X - 1) + \lambda_3(X - 1)^2 = 0$.
En évaluant en 1, on obtient $\lambda_1 = 0$.
On simplifie de nouveau par $(X - 1)$ et on obtient $\lambda_2 + \lambda_3(X - 1) = 0$.
Cette dernière égalité évaluée en 1 donne $\lambda_2 = 0$, puis on trouve $\lambda_3 = 0$.
La famille $(X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est donc libre.
Troisième méthode :
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$. Supposons que $\lambda_1(X - 1) + \lambda_2(X - 1)^2 + \lambda_3(X - 1)^3 = 0$.
En dérivant, on obtient $\lambda_1 + 2\lambda_2(X - 1) + 3\lambda_3(X - 1)^2 = 0$. En évaluant en 1, on obtient $\lambda_1 = 0$.
On dérive à nouveau et on obtient $2\lambda_2 + 6\lambda_3(X - 1) = 0$.
Cette dernière égalité évaluée en 1 donne $\lambda_2 = 0$, puis on trouve $\lambda_3 = 0$.
La famille $(X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est donc libre.