Chapitre 16 : Développements limités

★ ★ ★ Obtenir un équivalent simple d'une combinaison linéaire à l'aide d'un développement limité.

Exercice 1 [Solution]
Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 2 [Solution]
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $u_n = \dfrac{\mathrm{sh}(\frac{1}{n}) - \tan(\frac{1}{n})}{\cos(\frac{1}{n}) - \mathrm{ch}(\frac{1}{n})}$. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0 par valeurs positives.

★ Bien manipuler les développements limité : produit, quotient, composée, substitution, ...

Exercice 3 [Solution]
Déterminer le développement limité de $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ à l'ordre 5 en 0 en utilisant :

1. les développements limités de sh et ch ;
2. le développement limité de exp ;
3. la formule de Taylor-Young ;
4. le fait que $\mathrm{th}' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}$;
5. le fait que $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2$.
6. le fait que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\left(\mathrm{th}^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ et $\mathrm{th}(\mathrm{th}^{-1}(x)) = x$.

★ Mener une étude locale au voisinage de $a \neq 0$ en se ramenant en 0.

Exercice 4 [Solution]
Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1 - x + \ln(x)}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$ admet une limite en 1 et déterminer celle-ci.

★ Utiliser le développement limité d'une fonction afin d'obtenir une information locale sur sa courbe représentative.

Exercice 5 [Solution]
Considérons $f : x \mapsto \frac{x^2}{\mathrm{sh}(x)}$.

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que ce prolongement est de classe $\mathscr{C}^1$.
3. Déterminer l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de 0.

★ Déterminer le développement asymptotique d'une fonction au voisinage de $\pm\infty$ afin d'étudier les branches infinies.

Exercice 6 [Solution]
Montrer que $f : x \mapsto \frac{x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1}$ admet une asymptote affine en $+\infty$ puis déterminer la position relative de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote.

★ Déterminer le développement asymptotique d'une suite définie implicitement ou par récurrence.

Exercice 7 [Solution]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$. On notera x_n cette unique solution.
2. A l'aide d'un encadrement, déterminer un équivalent simple de la suite (x_n).
3. Perfectionner votre résultat en montrant que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.
4. En utilisant le fait que $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer un développement asymptotique à trois termes pour la suite (x_n).

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
La fonction f est continue sur $]-1;+\infty[\setminus\{0\}$.
Pour tout $x \in]-1;+\infty[\setminus\{0\}$, $f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$.
Or $x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ et $\ln(1+x)-x = -\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ donc $\ln(1+x)-x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.
D'où $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}$ d'où D'où $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$.
Donc $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 2 [Enoncé]
On a $\mathrm{sh}(\frac{1}{n}) - \tan(\frac{1}{n}) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ d'où $\mathrm{sh}(\frac{1}{n}) - \tan(\frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{6n^3}$.
Par ailleurs, $\cos(\frac{1}{n}) - \mathrm{ch}(\frac{1}{n}) = \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ d'où $\cos(\frac{1}{n}) - \mathrm{ch}(\frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{n^2}$.
Par quotient,

$$\frac{\mathrm{sh}(\frac{1}{n}) - \tan(\frac{1}{n})}{\cos(\frac{1}{n}) - \mathrm{ch}(\frac{1}{n})} \sim \frac{-\frac{1}{6n^3}}{-\frac{1}{n^2}} \sim \frac{1}{6n}.$$

Par conséquent $u_n \sim \frac{1}{6n}$.
Comme les équivalents préservent les limites et les signes, (u_n) converge vers 0 par valeurs positives.

Exercice 3 [Enoncé]

1.
$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) \left(1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)^2 + o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = -1 + \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(x) &\underset{x\to 0}{=} -1 + \frac{2}{2 + (-2x) + \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{6} + \frac{(-2x)^4}{24} + \frac{(-2x)^5}{120} + o\left(x^5\right)} \\
&\underset{x\to 0}{=} -1 + \frac{1}{1 - \left(x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)\right)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)\right) + \left(x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)\right)^2 \\
&\qquad + \left(x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)\right)^3 + \left(x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)\right)^4 \\
&\qquad + \left(x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)\right)^5 + o(x^5) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + (-1+1)x^2 + \left(\frac{2}{3} - 2 + 1\right)x^3 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 1 - 3 + 1\right)x^4 \\
&\qquad + \left(\frac{2}{15} - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + 2 + 3 - 4 + 1\right)x^5 + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

3. La fonction th est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x), \quad \mathrm{th}''(x) = -2\mathrm{th}'(x)\mathrm{th}(x) = -2\mathrm{th}(x) + 2\mathrm{th}^3(x), \quad \mathrm{th}^{(3)}(x) = -2\mathrm{th}'(x) + 6\mathrm{th}'(x)\mathrm{th}^2(x)$$

i.e. $\mathrm{th}^{(3)}(x) = -2 + 8\mathrm{th}^2(x) - 6\mathrm{th}^4(x)$. d'où

$$\mathrm{th}^{(4)}(x) = 16\mathrm{th}'(x)\mathrm{th}(x) - 18\mathrm{th}'(x)\mathrm{th}^3(x) = 16\mathrm{th}(x) - 34\mathrm{th}^3(x) + 18\mathrm{th}^5(x),$$

D'où

$$\mathrm{th}^{(5)}(x) = 16\mathrm{th}'(x) - 102\mathrm{th}'(x)\mathrm{th}^2(x) + 18\mathrm{th}'(x)\mathrm{th}^4(x)\,.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{th}(0) = 0, \quad \mathrm{th}'(0) = 1, \quad \mathrm{th}''(0) = 0, \quad \mathrm{th}^{(3)}(0) = -2,, \quad \mathrm{th}^{(4)}(0) = 0, \quad \mathrm{th}^{(5)}(0) = 16.$$

D'après la formule de Taylor-Young,

$$\begin{aligned}\mathrm{th}(x) &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{th}(0) + \mathrm{th}'(0)x + \frac{\mathrm{th}''(0)}{2}x^2 + \frac{\mathrm{th}^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{\mathrm{th}^{(4)}(0)}{24}x^4 + \frac{\mathrm{th}^{(5)}(0)}{120}x^5 + o\left(x^5\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)\end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^2(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)^2\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + \frac{7x^4}{12} + o\left(x^4\right)\,.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + \left(x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)\right)}\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \left(x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)\right) + \left(x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)\right)^2 + o\left(x^4\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + \frac{2x^4}{3} + o\left(x^4\right)\,.\end{aligned}$$

Par primitivation, on obtient $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{th}(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)$.

5. Par quotient, $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ d'où $\mathrm{th}^2(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.
Autrement dit $\mathrm{th}^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^2)$ i.e. $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o(x^2)$
Par primitivation, $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{th}(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.
Ainsi $\mathrm{th}^2(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$ i.e. $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$.
Par primitivation, on obtient $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{th}(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)$.
Cette dernière méthode est de loin la meilleure. En effet, les calculs sont simples et on peut aisément déterminer le développement limité à un ordre supérieur.

6. Pour tout $x \in]-1,1[$, $\left(\mathrm{th}^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ d'où $\left(\mathrm{th}^{-1}\right)'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)$ et donc

$$\left(\mathrm{th}^{-1}\right)(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

Comme th est une fonction impaire de classe $\mathscr{C}^\infty$, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathrm{th}(\mathrm{th}^{-1}(x)) &\underset{x\to 0}{=} a\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right) + b\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right)^3 + \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right)^5 + o(x^5)\\ &\underset{x\to 0}{=} ax + \left(\tfrac{a}{3} + b\right)x^3 + \left(\tfrac{a}{5} + b + c\right)x^5 + o(x^5)\end{aligned}$$

Or $\mathrm{th}(\mathrm{th}^{-1}(x)) = x$ pour tout $x \in]-1,1[$. Par unicité du développement limité, $\begin{cases} a = 1 \\ \frac{a}{3} + b = 0 \\ \frac{a}{5} + b + c = 0 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = \frac{2}{15} \end{cases}$.

Conclusion : $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)$.

Exercice 4 [Enoncé]

$f(1+h) = \dfrac{1-(1+h)+\ln(1+h)}{1-\sqrt{2(1+h)-(1+h)^2}} = \dfrac{-h+\ln(1+h)}{1-\sqrt{1-h^2}} \underset{h\to 0}{=} \dfrac{-h+(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2))}{1-(1+\frac{1}{2}(-h^2)+o(h^2))} \underset{h\to 0}{=} \dfrac{-\frac{h^2}{2}+o(h^2)}{\frac{h^2}{2}+o(h^2)} \underset{h\to 0}{=} \dfrac{-1+o(1)}{1+o(1)}$.

Donc $f(1+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -1$ i.e. $f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -1$.

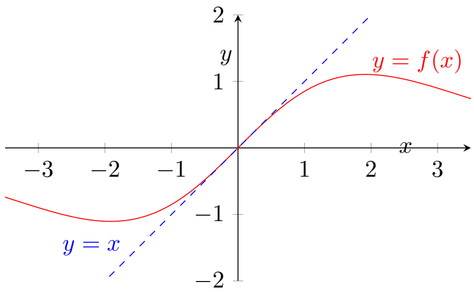
Exercice 5 [Enoncé]

Considérons $f : x \mapsto \frac{x^2}{\operatorname{sh}(x)}$.

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ car quotient de fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur s'annule uniquement en 0. De plus, $\frac{x^2}{\operatorname{sh}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 0$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_*$, $f'(x) = \frac{2x\operatorname{sh}(x)-x^2\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)}$. Or $2x\operatorname{sh}(x) - x^2\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^2)$. D'où $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
   D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 et donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. On a

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)} \\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(1-\left(\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)+o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

   Ainsi $f(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$. Par conséquent, la courbe représentative de f se situe au dessus (resp. au dessous) de la tangente d'équation $y = x$ au voisinage de 0 à gauche (resp. à droite).



Exercice 6 [Enoncé]

<u>Première méthode :</u> Déterminons pas à pas un développement asymptotique de f en $+\infty$.

On a $x\operatorname{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x$ et $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x\mathrm{e}^x\right)$ donc $x\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x$.
Par ailleurs, $\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$. D'où $f(x) = \frac{x\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ i.e. $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + o(x)$
Cherchons à présent un équivalent de $x \mapsto f(x) - x$ en $+\infty$.

$$f(x) - x = \frac{x\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) - x(\operatorname{ch}(x)-1)}{\operatorname{ch}(x)-1} = \frac{-\operatorname{sh}(x)+x}{\operatorname{ch}(x)-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^x} = -1$$

Par conséquent, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - 1 + o(1)$ et donc la courbe représentative de f admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote d'équation $y = x - 1$.
Cherchons à présent le signe de $x \mapsto f(x) - (x-1)$ afin de connaître la position de la courbe par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

$$f(x) - x + 1 = \frac{\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) + x - 1}{\operatorname{ch}(x)-1} = \frac{\mathrm{e}^{-x} + x - 1}{\operatorname{ch}(x)-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^x} = 2x\mathrm{e}^{-x}$$

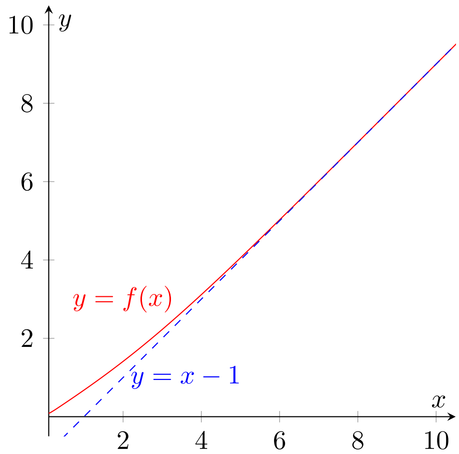
La fonction $x \mapsto f(x) - (x-1)$ est positive au voisinage de $+\infty$ donc la courbe représentative de f est au dessus de l'asymptote d'équation $y = x - 1$.
Au passage, nous avons déterminé un développement asymptotique à trois termes de f en $+\infty$:

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - 1 + 2x\mathrm{e}^{-x} + o(x\mathrm{e}^{-x})$$

Deuxième méthode : Déterminons directement un développement asymptotique de f en $+\infty$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1} \\
&= \frac{x - \mathrm{th(x)}}{1 - \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}} \\
&= \left(x - \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}} \\
&\underset{x \to +\infty}{=} \left(x - \left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\right)\left(\left(1 - \mathrm{e}^{-2x} + o\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)\right)\right)\right) \left(1 + \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} + o\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)\right) \\
&\underset{x \to +\infty}{=} \left(x - 1 + 2\mathrm{e}^{-2x} + o\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} + o\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)\right) \\
&\underset{x \to +\infty}{=} x - 1 + \frac{x}{\mathrm{ch}(x)} + o\left(\frac{x}{\mathrm{ch}(x)}\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de f admet une asymptote d'équation $y = x - 1$ et la courbe se situe au dessus de cette asymptote.



Exercice 7 [Enoncé]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$ et $f(]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[) = \mathbb{R}$. Donc f est bijective de $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$ dans $\mathbb{R}$. D'où 0 admet un unique antécédent par f. Conclusion : l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$ que l'on note x_n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{\pi}{2} + n\pi \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2} + n\pi$. Par conséquent, $x_n \sim n\pi$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse à la quantité $x_n - n\pi$. On a $\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$. De plus, $x_n - n\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. D'où $x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}(x_n) \longrightarrow \frac{\pi}{2}$. On a donc : $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse à la quantité $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$.
   On a $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = \mathrm{Arctan}(x_n) - \frac{\pi}{2} = -\mathrm{Arctan}(\frac{1}{x_n}) \sim -\frac{1}{x_n} \sim -\frac{1}{n\pi}$.
   D'où $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.