Chapitre 14 : Polynômes

★ Déterminer le reste de la division euclidienne en effectuant des évaluations astucieuses.

Exercice 1 [Solution]
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$.
2. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - X^2 - X + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire une expression explicite de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

★ Déterminer la multiplicité d'une racine à l'aide des dérivées successives.

Exercice 2 [Solution]
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$ n'admet pas de racines multiples dans $\mathbb{C}$.

★ Décomposer un polynôme en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ en utilisant la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3 [Solution]
Décomposer le polynôme $X^8 + X^4 + 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

★ Utiliser les relations coefficients-racines.

Exercice 4 [Solution]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $P = (X+1)^n - (X-1)^n$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{2p} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{(-1)^p}{2p+1}$ où $\operatorname{cotan} = \frac{\cos}{\sin}$.

★ Montrer qu'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est nul en montrant qu'il admet plus de $n+1$ racines comptées avec multiplicité.

Exercice 5 [Solution]
Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Montrer que $P(0) = P(1) = P'(0) = P'(1) = 1$ si et seulement si $P = 2X^3 - 3X^2 + X + 1$.

★ Montrer qu'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est nul en montrant qu'il admet une infinité de racine.

Exercice 6 [Solution]
Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in A$ où

1. $A = \mathbb{R}$;
2. $A = \{\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$;
3. $A = [0, 1]$;
4. $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

★ Montrer qu'un polynôme en divise un autre en comparant leurs racines.

Exercice 7 [Solution]
À quelle condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $X^2 + 1$ divise-t-il $X^n + 1$?

★ Savoir décomposer en éléments simples une fonction rationnelle afin de déterminer des primitives, ...

Exercice 8 [Solution]
Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan(x)} \mathrm{d}x$.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. $A^3 - A^2 - A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe $R, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$X^n = (X^3 - X^2 - X + 1)Q + R \text{ et } \deg(R) < 3\,. \tag{1}$$
Ainsi, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $R = aX^2 + bX + c$.
Notons $B = X^3 - X^2 - X + 1$. On remarque que $B(1) = 0$, $B'(1) = 0$ et $B(-1) = 0$, par conséquence 1 est racine multiple de B et -1 est racine simple de B.
Effectuons des évaluations en les racines de B (i.e. en 1 et -1) dans la relation donnée par la division euclidienne. On trouve alors :
$$1 = R(1) = a + b + c \quad \text{et} \quad (-1)^n = R(-1) = a - b + c$$
D'où $b = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ impair}\,; \\ 0 \text{ si } n \text{ pair.} \end{cases}$
En dérivant la relation donnée par la division euclidienne, on obtient :
$$nX^{n-1} = B'Q + BQ' + R'$$
qui évaluée en 1 donne $n = R'(1) = 2a + b$. D'où
$$a = \frac{1}{2}(n - b) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} \text{ si } n \text{ est impair}\,; \\ \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases} \qquad \text{et} \quad c = 1 - a - b = \begin{cases} \frac{1-n}{2} \text{ si } n \text{ est impair}\,; \\ \frac{2-n}{2} \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$
Conclusion :
$$R = \begin{cases} \frac{n-1}{2}(X^2 - 1) + X \text{ si } n \text{ est impair}\,; \\ \frac{n}{2}(X^2 - 1) + 1 \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$
On vérifie pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ que notre résultat est bon.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En évaluant l'équation (1) en A, on obtient :
$$A^n = \Bigg(\underbrace{A^3 - A^2 - A + I_3}_{=0}\Bigg) Q(A) + R(A) = R(A) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}(A^2 - I_3) + A \text{ si } n \text{ est impair}\,; \\ \frac{n}{2}(A^2 - I_3) + I_3 \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$
i.e.
$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est impair}\,; \\ \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Exercice 2 [Enoncé]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}X^k$. On a $P' = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!}X^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}X^i = P - \frac{1}{n}X^n$
Par l'absurde, supposons que P admette une racine multiple que l'on note $\alpha \in \mathbb{C}$.
Par conséquent, $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$. Ainsi $P(\alpha) - \frac{1}{n}\alpha^n = 0$ i.e. $\alpha^n = 0$ d'où $\alpha = 0$ (car $\mathbb{C}$ est intègre).
Ce qui est absurde car 0 n'est pas racine de P. En effet, $P(0) = 1$.

Conclusion : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}X^k$ n'admet pas de racines multiples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3 [Enoncé]
Notons $P = X^8 + X^4 + 1$ et $Q = X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$ de sorte que $P = Q(X^4)$. D'où $P = (X^4 - j)(X^4 - j^2)$.
On détermine les racines 4-ièmes de $j = \mathbf{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = \mathbf{e}^{-\frac{2i\pi}{3}}$ afin de factoriser P.
L'ensemble des racines 4-ièmes de j est $\mathbf{e}^{\frac{i\pi}{6}}\mathbb{U}_4$ et l'ensemble des racines 4-ièmes de j^2 est $\mathbf{e}^{-\frac{i\pi}{6}}\mathbb{U}_4$. Par conséquent,

$$P = \underline{\left(X - \mathbf{e}^{\frac{i\pi}{6}}\right)}\,\underline{\left(X - \mathbf{e}^{\frac{4i\pi}{6}}\right)}\,\underline{\left(X - \mathbf{e}^{\frac{7i\pi}{6}}\right)}\,\underline{\left(X - \mathbf{e}^{\frac{10i\pi}{6}}\right)}\,\underline{\left(X - \mathbf{e}^{-\frac{i\pi}{6}}\right)}\,\underline{\left(X - \mathbf{e}^{\frac{2i\pi}{6}}\right)}\,\underline{\left(X - \mathbf{e}^{\frac{5i\pi}{6}}\right)}\,\underline{\left(X - \mathbf{e}^{\frac{8i\pi}{6}}\right)}.$$

On regroupe les facteurs associées à des racines conjuguées (soulignés en couleur pour votre compréhension) pour obtenir la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
En utilisant le fait que, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $(X - \alpha)(X - \overline{\alpha}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$, on s'épargne des calculs intermédiaires pour déterminer la décomposition en facteurs irréductibles ci-dessous.

$$P = \underline{(X^2 + X + 1)}\,\underline{(X^2 - X + 1)}\,\underline{(X^2 + \sqrt{3}X + 1)}\,\underline{(X^2 - \sqrt{3}X + 1)}$$

Exercice 4 [Enoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminons les racines de $P = (X + 1)^n - (X - 1)^n$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 1)^n = (z - 1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^n = 1 \text{ car } z = -1 \text{ n'est pas solution}.$$

Notons $w = \mathbf{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$ de sorte que $\mathbb{U}_n = \{w^k, k \in [\![0, n - 1]\!]\}$. On a :

$$\begin{aligned}
P(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n - 1]\!],\ \frac{z - 1}{z + 1} = w^k \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n - 1]\!],\ z - 1 = w^k(z + 1) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n - 1]\!],\ z(1 - w^k) = 1 + w^k \\
&\underset{k=0 \text{ impossible}}{\Leftrightarrow} \quad \exists k \in [\![1, n - 1]\!],\ z = \frac{1 + w^k}{1 - w^k} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1, n - 1]\!],\ z = \frac{\mathbf{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\left(\mathbf{e}^{-\frac{ik\pi}{n}} + \mathbf{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\right)}{\mathbf{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\left(\mathbf{e}^{-\frac{ik\pi}{n}} - \mathbf{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1, n - 1]\!],\ z = \frac{\cos(\frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})}\mathbf{i} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1, n - 1]\!],\ z = \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathbf{i}
\end{aligned}$$

On a trouvé $n - 1$ racines du polynôme P qui est de degré $n - 1$ et de coefficients dominants $\binom{n}{1} - \left(-\binom{n}{1}\right) = 2n$, donc

$$P = 2n \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathbf{i}\right)$$

Par conséquent, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P = 2(2p + 1) \prod_{k=1}^{2p}\left(X - \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p + 1}\right)\mathbf{i}\right)$$

D'après la relation coefficients-racines,

$$\prod_{k=1}^{2p}\left(\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p + 1}\right)\mathbf{i}\right) = (-1)^{2p+1-1}\frac{1 - (-1)^{2p+1}}{2(2p + 1)}$$

i.e.

$$\prod_{k=1}^{2p}\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p + 1}\right) = \frac{(-1)^p}{2p + 1}.$$

Exercice 5 [Enoncé]
Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Le sens retour est trivial.
Supposons à présent que $P(0) = P(1) = P'(0) = P'(1) = 1$. Notons $Q = 2X^3 - 3X^2 + X + 1$.
On a $(P-Q)(0) = (P-Q)(1) = (P-Q)'(0) = (P-Q)'(1) = 0$. Donc 0 et 1 sont racine multiple du polynôme $P-Q$. On a trouvé au moins 4 racines comptées avec multiplicité de $P - Q \in \mathbb{R}_3[X]$. Par conséquent, $P - Q$ est le polynôme nul i.e. $P = 2X^3 - 3X^2 + X + 1$.

Exercice 6 [Enoncé]

1. Supposons par l'absurde qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sin(x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(2\pi n) = \sin(2\pi n) = 0$. Par conséquent, P admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul d'où $P = 0$. Ainsi $\sin(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Absurde.
   Conclusion : Il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Analyse : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$. Le polynôme $P - 1$ admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul d'où $P = 1$.
   Synthèse : Le polynôme $P = 1$ vérifie bien $P\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
   Conclusion : Le seul polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ est $P = 1$.
3. Supposons par l'absurde qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, $P(x) = \sin(x)$.
   Alors $P''(x) = -\sin(x) = -P(x)$ i.e. $P''(x) + P(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Par conséquent, le polynôme $P'' + P$ admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. On a alors $P = -P''$ d'où
   $$\deg(P) = \deg(P'') = \begin{cases} -\infty \text{ si } P \in \mathbb{R}_1[X] \\ \deg(P) - 2 \text{ sinon.} \end{cases}$$
   Le deuxième cas est impossible par conséquent $\deg(P) = -\infty$ d'où $P = 0$.
   Ainsi $\sin(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Absurde.
   Conclusion : Il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
4. Supposons par l'absurde qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\frac{1}{n}\right) = \sin(\frac{1}{n})$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$ ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = -4\sin^3\left(\frac{1}{3n}\right) + 3\sin\left(\frac{1}{3n}\right) \text{ i.e. } P\left(\frac{1}{n}\right) = -4P^3\left(\frac{1}{3n}\right) + 3P\left(\frac{1}{3n}\right)$$
   Par conséquent, le polynôme $P(3X) + 4P^3(X) - 3P(X)$ admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. On a alors $4P^3(X) = 3P(X) - P(3X)$ d'où $\deg(P^3) \leqslant \deg(P)$ et donc P est constant. Par conséquent, $P(1) = P\left(\frac{1}{2}\right)$ i.e. $\sin(1) = \sin\left(\frac{1}{2}\right)$ ce qui est absurde.
   Conclusion : Il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P\left(\frac{1}{n}\right) = \sin(\frac{1}{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 [Enoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $P = X^n + 1$.
On remarque que $X^2 + 1$ admet uniquement $\mathbf{i}$ et $-\mathbf{i}$ comme racine donc $X^2 + 1 | X^n + 1 \iff P(\mathbf{i}) = P(-\mathbf{i}) = 0$.
Or $P \in \mathbb{R}[X]$ donc si $P(\mathbf{i}) = 0$ alors $P(\bar{\mathbf{i}}) = 0$ i.e. $P(-\mathbf{i}) = 0$. D'où
$$X^2 + 1 | X^n + 1 \iff P(\mathbf{i}) = 0 \iff \mathbf{i}^n + 1 = 0 \iff \mathbf{i}^n = -1 \iff \exists k \in \mathbb{N}, n = 4k + 2\,.$$
Donc $X^2 + 1$ divise $X^n + 1$ si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}, n = 4k + 2$.

Exercice 8 [Enoncé]
Nous allons utiliser le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$: $y = \tan(x)$ (et donc $x = \text{Arctan}(y)$ d'où $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y$).
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan(x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+y} \times \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{(1+y)(1+y^2)}\mathrm{d}y\,.$$
Notons $f : y \mapsto \frac{1}{(1+y)(1+y^2)}$. D'après le théorème de la décomposition en éléments simples, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \quad \frac{1}{(1+y)(1+y^2)} = \frac{a}{1+y} + \frac{by+c}{1+y^2}$$
Déterminons a, b et c.
On a $(1+y)f(y) = a + (1+y)\frac{by+c}{1+y^2} \underset{y\to-1}{\longrightarrow} a$ et $(1+y)f(y) = \frac{1}{1+y^2} \underset{y\to-1}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$. Par unicité de la limite, $a = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, $yf(y) = \frac{ay}{1+y} + \frac{by^2+cy}{1+y^2} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} a+b$ et $yf(y) = \frac{y}{(1+y)(1+y^2)} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $b = -a = -\frac{1}{2}$.
En évaluant en 0, on trouve $1 = a + c$ donc $c = 1 - a = \frac{1}{2}$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan(x)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y}\mathrm{d}y - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2y}{1+y^2}\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{1}{2}\left[\ln|1+y|\right]_0^1 - \tfrac{1}{4}\left[\ln|1+y^2|\right]_0^1 + \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{Arctan}(y)\right]_0^1 \\
&= \frac{\ln(2)}{4} + \frac{\pi}{8} \\
&= \frac{2\ln(2)+\pi}{8}
\end{aligned}$$