Chapitre 13 : Dérivabilité

★ Étudier la dérivabilité d'une fonction en utilisant la dérivabilité à gauche et à droite.

Exercice 1 [Solution]

Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 \text{ si } x \leqslant 1 \\ (x-1)^3 \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

★ Utiliser les théorèmes classiques associés à la dérivabilité : théorème de Rolle, EAF, ...

Exercice 2 [Solution]
Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$ et $p, q \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $X^n + pX + q$ possède au plus trois racines réelles.

★ Utiliser l'IAF pour l'étude de suites définies par récurrence.

Exercice 3 [Solution]
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+2}$.

★ Utiliser le théorème de la limite de la dérivée pour étudier la dérivabilité ou le caractère $\mathscr{C}^1$ en un point.

Exercice 4 [Solution]
Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)$.

★ Obtenir des inégalités de convexité en s'aidant de l'inégalité de Jensen.

Exercice 5 [Solution]

1. *Inégalité de Jensen.* Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, et tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, on a :
   $$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\,.$$
2. *Application : inégalité arithmético-géométrique.* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\,.$$

★ Utiliser les théorèmes généraux (formule de Leibniz, dérivée d'une réciproque,...) sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

Exercice 6 [Solution]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons la fonction $x \mapsto x^{n+1} \ln|x|$.

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f^{(p)}$ pour tout $p \in [\![0, n+1]\!]$.
2. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On notera encore f ce prolongement.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^n$ mais pas de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]

La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 \text{ si } x \leqslant 1 \\ (x-1)^3 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

De plus, pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = x - 1 \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$.

Par ailleurs, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = (x-1)^2 \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0$.

Donc f est dérivable à gauche et droite en 1.

De plus, les dérivées à gauche et à droite en 1 coïncident, donc f est dérivable en 1 et donc sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 [Enoncé]

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$ et $p, q \in \mathbb{R}$.

Supposons par l'absurde que le polynôme $X^n + pX + q$ possède au moins 4 racines réelles distinctes que l'on note dans l'ordre croissant x_1, x_2, x_3 et x_4. Notons $f : x \mapsto x^n + px + q$ la fonction polynomiale associée.

Cette dernière et infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $f' : x \mapsto nx^{n-1} + p$ et $f'' : x \mapsto n(n-1)x^{n-2}$.

On a $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$.

D'après le théorème de Rolle sur les segments $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$, il existe $\alpha_1 \in]x_1, x_2[$, $\alpha_2 \in]x_2, x_3[$ et $\alpha_3 \in]x_3, x_4[$ tels que $f'(\alpha_1) = f'(\alpha_2) = f'(\alpha_3) = 0$.

On utilise à nouveau le théorème de Rolle avec f' sur les segments $[\alpha_1, \alpha_2]$ et $[\alpha_2, \alpha_3]$.

Il existe alors $\beta_1 \in]\alpha_1, \alpha_2[$ et $\beta_2 \in]\alpha_2, \alpha_3[$ tels que $f''(\beta_1) = f''(\beta_2) = 0$. Or f'' s'annule uniquement en un seul point.

L'hypothèse est donc absurde.

Conclusion : le polynôme $X^n + pX + q$ possède au plus trois racines réelles.

Exercice 3 [Enoncé]

Soit (u_n) suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Posons $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \frac{x+1}{x+2} \end{cases}$. Recherche d'un point fixe $l \in \mathbb{R}_+$ de f :

$$l = f(l) \iff l^2 + l - 1 = 0 \iff l = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \iff l = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Posons $l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

On a que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, f est $\frac{1}{4}$-lipschitzienne. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - l| = |f(u_{n-1}) - f(l)| \leqslant \tfrac{1}{4}|u_{n-1} - l| \leqslant \tfrac{1}{4^n}|u_0 - l|$$

D'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 4 [Enoncé]

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\text{ch}(x)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car quotient de fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, elle est à valeur dans $]0, 1]$ et plus précisément, 1 admet un unique antécédent qui est 0.

Or Arccos est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$. Par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Il reste à étudier la dérivabilité en 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = -\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{ch}^2(x)}}} = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)\sqrt{\text{ch}^2(x) - 1}} = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)|\text{sh}(x)|} = \frac{\text{signe}(x)}{\text{ch}(x)}$$

On a $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -1$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$.

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 1$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

Les dérivées à gauche et à droite en 0 ne coïncident pas. Donc f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5 [Enoncé]

1. Nous allons démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition :

$$\mathrm{P}(n) : \text{« Pour tout } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ et pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in I^n \text{, on a } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in I \text{ et } f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i). \text{ »}$$

est vraie.
Initialisation : Pour $n = 1$, cela revient à prendre $\lambda_1 = 1$ et $x_1 \in I$.
On a alors trivialement : $\lambda_1 x_1 \in I$ et $f(\lambda_1 x_1) \leqslant \lambda_1 f(x_1)$, ce qui démontre $\mathrm{P}(1)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathrm{P}(n)$.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ tel que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, et soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$.
Posons : $t = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \in [0, 1]$ (le fait que t soit inférieur à 1 découle de l'inégalité $t \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$).
Si $t = 0$, alors on est dans le cas où : $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, et : $\lambda_{n+1} = 1$, et on montre alors le résultat désirée trivialement, comme dans l'initialisation. Si $t \neq 0$, alors, en remarquant que $\lambda_{n+1} = 1 - t$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = t \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = t \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} x_i + (1 - t) x_{n+1}$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\lambda_i}{t} \in \mathbb{R}_+$, $x_i \in I$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} = \frac{t}{t} = 1$, d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} x_i \in I$ d'après $P(n)$.

Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = t \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} x_i}_{\in I} + (1 - t) \underbrace{x_{n+1}}_{\in I} \in I\,.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(t \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} x_i + (1 - t) x_{n+1}\right) \\
&\leqslant t f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} x_i\right) + (1 - t) f\left(x_{n+1}\right) \\
&\underset{P(n)}{\leqslant} t \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} f\left(x_i\right) + (1 - t) f\left(x_{n+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i),
\end{aligned}$$

d'où $\mathrm{P}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, et tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\,.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$.
On va utiliser l'inégalité de Jensen sur la fonction concave ln avec $\lambda_i = \frac{1}{n}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(x_i) \text{ i.e. } \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geqslant \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}}\right)$$

En composant par l'exponentielle, qui est croissante, on obtient $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Exercice 6 [Enoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons la fonction $x \mapsto x^{n+1}\ln|x|$.

1. Notons $g : x \mapsto x^{n+1}$ et $h : x \mapsto \ln|x|$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}x^{n+1-k} \text{ si } k \leqslant n+1 \\ 0 \text{ si } k > n+1 \end{cases} \quad \text{et} \quad h^{(k)}(x) = \begin{cases} (k-1)!(-1)^{k-1}x^{-k} \text{ si } k \neq 0 \\ \ln|x| \text{ si } k = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par produit. De plus, pour tout $p \in [\![0, n+1]\!]$,

$$f^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} g^{(k)} h^{(p-k)}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(p)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!}x^{n+1-p}\ln|x| + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}(p-k-1)!(-1)^{p-k-1}x^{n+1-k}x^{-(p-k)}$$

i.e.

$$f^{(p)}(x) = \left(\frac{(n+1)!}{(n+1-p)!}\ln|x| + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}(p-k-1)!(-1)^{p-k-1}\right)x^{n+1-p}$$

2. Par croissance comparée, $f(x) = x^{n+1}\ln|x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, la fonction f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 0$.
3. D'après la question 1, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $f^{(p)}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème de la limite de la dérivée appliquée successivement à f, f', $\ldots$, $f^{(n-1)}$, on montre que f est de classe $\mathscr{C}^1$, $\ldots$, $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $f^{(n+1)}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f n'est pas de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.