Chapitre 12 : Limites et continuité

★ Déterminer une limite via des encadrements, de la monotonie, des factorisations par le terme dominant ...

Exercice 1 [Solution]
Montrer que les fonctions suivantes admettent des limites en $+\infty$.

1. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(\mathrm{ch}(\sin(x)))\mathrm{e}^x}{\mathrm{Arctan}(x)}$;
2. $g : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \ln\left(1+\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t$;
3. $h : x \mapsto \dfrac{2^{2x+1}-3^{x-1}}{3^{x+1}-4^{x+2}}$.

★ Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite.

Exercice 2 [Solution]
Montrer que la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

★ Utiliser le théorème de prolongement par continuité.

Exercice 3 [Solution]
Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}}$. Montrer que f peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

★ Étudier la continuité d'une fonction en utilisant la continuité à gauche et à droite.

Exercice 4 [Solution]
On rappelle que pour tout réel x, $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x i.e. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
Considérons la fonction de la variable réelle $f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Z}\,; \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{\{x\}}} - \frac{\{x\}}{\mathrm{e}} \text{ sinon.} \end{cases}$ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

★ Résoudre une équation fonctionnelle par analyse-synthèse.

Exercice 5 [Solution]
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles $f(1+\frac{x}{2}) = f(x) + \lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

★ Utiliser les théorèmes classiques associés à la continuité : valeurs intermédiaires, bornes atteintes, bijection ...

Exercice 6 [Solution]
Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c+\frac{1}{2}) = f(c)$.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]

1. On a $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{ch}(\sin(x))) \geqslant \frac{\pi}{4}$.
   On en déduit que par divergence par minoration, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{ch}(\sin(x)))\mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Conclusion : $f(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(\operatorname{ch}(\sin(x)))\mathrm{e}^x}{\operatorname{Arctan}(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$;
2. Pour tout $y \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+y) \leqslant y$. Par croissance de l'intégrale, pour tout $x \in [1,+\infty[$,
   $$\int_1^x \ln\left(1+\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$
   La fonction g est croissante (car dérivable et de dérivée $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$ positive) et majorée. Donc g admet une limite finie en $+\infty$. Nous n'avons pas encore les outils pour déterminer explicitement cette limite (développement en série entière c.f. programme de spé).
3. $h(x) = \frac{2^{2x+1}-3^{x-1}}{3^{x+1}-4^{x+2}} = \frac{4-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^x}{3\left(\frac{3}{4}\right)^x-16} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{4}$.

Exercice 2 [Enoncé]
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $x_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ et $y_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n+\pi}}$.
On a $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, or $\cos\left(\frac{1}{x_n^2}\right) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\cos\left(\frac{1}{y_n^2}\right) = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.
D'après la caractérisation séquentielle de la limite, $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

Exercice 3 [Enoncé]
La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}}$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{2x}-1 > 0\} = \mathbb{R}_+^*$. De plus, par composée et quotient, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Étudions f au voisinage de 0.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2x}{\mathrm{e}^{2x}-1}}$$
Or $\frac{\mathrm{e}^y-1}{y} \underset{y\to0}{\longrightarrow} \exp'(0) = 1$ et $2x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$.
Par ailleurs, $\frac{\sin(y)}{y} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \sin'(0) = 1$ et $\sqrt{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$.
Par produit et quotient, on en déduit que $f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{1}{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Par conséquent, f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 4 [Enoncé]
La fonction f est 1-périodique. On va donc étudier la continuité de f sur $[0,1[$ uniquement. Par composée, combinaison linéaire et quotient, la fonction f est continue sur $]0,1[$. Étudions la continuité de f en 0.
Pour tout $x \in]0,1[$, $\{x\} = x$ d'où $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - \frac{x}{\mathrm{e}} \underset{x\to0+}{\longrightarrow} 0 = f(0)$.
Pour tout $x \in]-1,0[$, $\{x\} = x+1$ d'où $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}} - \frac{x+1}{\mathrm{e}} \underset{x\to0^-}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{\mathrm{e}} = 0 = f(0)$.
Donc f est continue à droite et en gauche en 0, donc f est continue en 0.
On conclut alors que f est continue sur $[0,1[$ et par conséquent sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 [Enoncé]
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Analyse : Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(1+\frac{x}{2}) = f(x) + \lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $1 + \frac{x}{2} = x \iff x = 2$.
Pour $x = 2$, on a $f(2) = f(2) + \lambda$ d'où $\lambda = 0$.
Par conséquent, si $\lambda \neq 0$, il n'y a aucune fonction solution du problème.
Traitons à présent le cas où $\lambda = 0$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} f(x) = f\left(1+\frac{x}{2}\right) = f\left(1+\frac{1+\frac{x}{2}}{2}\right) = f\left(1+\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\right) \underset{\text{recurrence}}{=} f\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}+\frac{x}{2^{n+1}}\right) &= f\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{x}{2^{n+1}}\right) \\ &= f\left(2-\frac{1}{2^n}+\frac{x}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

Or $2 - \frac{1}{2^n} + \frac{x}{2^{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$. Par continuité de f, $f(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(2)$. Or $f(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
Par unicité de la limite, $f(x) = f(2)$ et donc f est constante.
Synthèse : Si $\lambda = 0$, les fonctions constantes sont solutions du problème.
Conclusion : Si $\lambda \neq 0$, $S = \emptyset$ et si $\lambda = 0$, $S = \{x \mapsto c, c \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6 [Enoncé]
Soit $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.
Posons $g : x \mapsto f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$. La fonction g est définie et continue sur $[0, \frac{1}{2}]$.
On a $g(0) = f(\frac{1}{2}) - f(0)$ et $g(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = -g(0)$. Donc $g(0)$ et $g(\frac{1}{2})$ sont de signe opposé.
D'après le TVI, il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(c) = 0$ i.e. $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$.