Chapitre 11 : Calcul matriciel et systèmes linéaires

★ Calculer les puissances successives d'une matrice à l'aide du binôme de Newton.

Exercice 1 [Solution]
Notons A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Écrire A comme une combinaison linéaire de I_2 et J.
3. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

★ Utiliser les matrices élémentaires afin de résoudre des exercices théoriques.

Exercice 2 [Solution]
Montrer que les seules matrices carrées qui commutent avec toutes les autres sont les matrices scalaires.

★ Résoudre un système linéaire avec paramètres avec ou sans utiliser la notation des matrices augmentées.

Exercice 3 [Solution]
Soit $p \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire $\begin{cases} 2px + y = p \\ 2x + py = p \end{cases}$ d'inconnues réelles x et y.

★ Déterminer l'inversibilité et calculer l'inverse d'une matrice à l'aide de la matrice augmentée.

Exercice 4 [Solution]
Déterminer pour quels réels m la matrice $\begin{pmatrix} m & -m & m^2 \\ 1 & 1 & m+1 \\ 1 & -1 & m-1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse lorsqu'il existe.

★ Déterminer l'inversibilité et calculer l'inverse d'une matrice à l'aide d'un « polynôme annulateur ».

Exercice 5 [Solution]
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 en fonction de A et I_2.
2. En déduire que A n'est pas inversible.
3. Exprimer B^2 en fonction de B et I_3.
4. En déduire que B est inversible et déterminer son inverse.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2J$. Par itération immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. On a $A = 3I_2 - J$.
3. D'après la formule du binôme de Newton (car $3I_2$ et J commutent), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-J)^k \times 3^{n-k} I_2^{n-k} \\ &= 3^n I_2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{k-1} 3^{n-k} \right) J \\ &= 3^n I_2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k 3^{n-k} - 3^n \right) J \\ &= 3^n I_2 + \frac{1}{2} \left(1^n - 3^n \right) J \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & -3^n + 1 \\ -3^n + 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   La formule reste vraie pour $n = 0$.

Exercice 2 [Enoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA$.
Or, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$E_{i,j} A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Cela implique donc que $(E_{i,j}A)_{i,j} = a_{j,j}$ et $(E_{i,j}A)_{i,i} = a_{j,i}$. Par ailleurs

$$AE_{i,j} = \begin{array}{c} \qquad\qquad j^{\text{ème}} \text{ col.} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Cela implique donc que $(AE_{i,j})_{i,j} = a_{i,i}$. Par conséquent, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,i} = a_{j,j}$.
De plus, pour tout $i \neq j$, $(AE_{i,j})_{i,i} = 0$. D'où $a_{j,i} = 0$.
Donc $A = a_{1,1} I_n$ est une matrice scalaire.

Exercice 3 [Enoncé]
Soit $p \in \mathbb{R}$. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2px + y = p \\ 2x + py = p \end{cases} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} 2x + py = p \\ 2px + y = p \end{cases} \underset{L_2 \leftrightarrow L_1 - pL_2}{\iff} \begin{cases} 2x + py = p \\ (1 - p^2)y = p - p^2 \end{cases}$$

<u>Premier cas :</u> $p = 1$.
$\begin{cases} 2px + y = p \\ 2x + py = p \end{cases} \iff 2x + y = 1$. Donc $S = \{(x, 1 - 2x), x \in \mathbb{R}\}$.

Deuxième cas : $p=-1$.
$\begin{cases} 2px+y=p \\ 2x+py=p \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-y=-1 \\ 0=-2 \end{cases}$. Donc $S=\emptyset$.
Troisième cas : $p\notin\{-1,1\}$.
$\begin{cases} 2px+y=p \\ 2x+py=p \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+py=p \\ y=\frac{p}{1+p} \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{p}{2(1+p)} \\ y=\frac{p}{1+p} \end{cases}$. Donc $S=\left\{\left(\frac{p}{2(1+p)},\frac{p}{1+p}\right)\right\}$.

Méthode via l'écriture avec la matrice augmentée associée au système.

$$\begin{pmatrix} 2p & 1 & | & p \\ 2 & p & | & p \end{pmatrix}$$

Appliquons des opérations élémentaires sur les lignes pour transformer la partie gauche en I.

- $L_1 \leftrightarrow L_2$
- $L_2 \leftrightarrow L_1 - pL_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & p & | & p \\ 0 & 1-p^2 & | & p-p^2 \end{pmatrix}$$

Premier cas : $p=1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $S=\{(x,1-2x),x\in\mathbb{R}\}$.
Deuxième cas : $p=-1$.
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$. Donc $S=\emptyset$.
Troisième cas : $p\notin\{-1,1\}$.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{p}{2(1+p)} \\ 0 & 1 & | & \frac{p}{1+p} \end{pmatrix}$. Donc $S=\left\{\left(\frac{p}{2(1+p)},\frac{p}{1+p}\right)\right\}$.

Exercice 4 [Enoncé]
Soit $m\in\mathbb{R}$. Soit la matrice A donnée par

$$\begin{pmatrix} m & -m & m^2 \\ 1 & 1 & m+1 \\ 1 & -1 & m-1 \end{pmatrix}$$

Formons la matrice augmentée $(A|I_3)$ où I_3 est la matrice identité 3×3.

$$\begin{pmatrix} m & -m & m^2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m+1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m-1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Appliquons des opérations élémentaires sur les lignes pour transformer la partie gauche en I.

- $L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & m-1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 & | & 0 & 1 & 0 \\ m & -m & m^2 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
- $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & m-1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m & | & 1 & 0 & -m \end{pmatrix}$$

Si $m=0$, la matrice A n'est pas inversible car sinon la matrice triangulaire supérieure $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ serait également inversible. Or l'un des coefficients diagonaux de cette matrice est nul.
Traitons à présent le cas où $m\neq 0$.

- $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$
- $L_3 \leftarrow \frac{1}{m}L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & m-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m} & 0 & -1 \end{array}\right)$$

- $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & m & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m} & 0 & -1 \end{array}\right)$$

- $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
- $L_1 \leftarrow L_1 - mL_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & m+\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{m} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m} & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Donc $A = \begin{pmatrix} m & -m & m^2 \\ 1 & 1 & m+1 \\ 1 & -1 & m-1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & m+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{m} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{m} & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 [Enoncé]

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ d'où $A^2 = -2A$.
2. Par l'absurde, supposons que A est inversible. Alors, en multipliant par l'inverse de A dans l'égalité de la question précédente, on obtient $A = -2I_2$ ce qui est absurde.
   Par conséquent, A n'est pas inversible.
3. On a $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -B + 2I_3$.
4. Par conséquent, $B^2 + B = 2I_3$ et donc $B(\frac{1}{2}(B + I_3)) = I_3$.
   Par conséquent B est inversible et $B^{-1} = \frac{1}{2}(B + I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Cette méthode classique, reposant sur un polynôme annulateur et plus particulièrement le polynôme minimal d'une matrice, sera normalement guidée. C'est normal que vous ne connaissiez pas ces terminologies car les polynômes annulateurs sont au programme de deuxième année et le polynôme minimal uniquement au programme de MP.

Un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ *est dit annulateur de* $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *lorsque* $P(M) = 0$ *où* $P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k$.

Dans l'exercice ci-dessus, $X^2 + 2X$ *et* $X^2 + X - 2$ *sont respectivement des polynômes annulateurs de* A *et de* B.
Le polynôme minimal de M *est l'unique polynôme annulateur de* M *qui est unitaire et de degré minimal.*
On a les résultats suivants :

- *si* 0 *n'est pas racine d'un polynôme annulateur de* M *alors* M *est inversible ;*
- *si* 0 *est racine du polynôme minimal de* M *alors* M *n'est pas inversible.*