Chapitre 10 : Suites numériques

★ Utiliser des encadrements et/ou la monotonie d'une suite pour déterminer sa nature.

Exercice 1 [Solution]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = \dfrac{1}{n^3} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor k^2 \pi \rfloor$

Montrer que la suite (S_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 2 [Solution]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$.

Montrons que la suite (S_n) converge.

★ Montrer que deux suites sont adjacentes pour montrer qu'elles convergent.

Exercice 3 [Solution]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

★ Utiliser des suites extraites pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite.

Exercice 4 [Solution]

1. Exprimer $\cos(n+1) + \cos(n-1)$ et $\cos(2n)$ en fonction de $\cos(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

★ Déterminer une borne sup/inférieure en utilisant la caractérisation séquentielle associée.

Exercice 5 [Solution]

Considérons $A = \left\{ \frac{n+\sqrt{m}}{\sqrt{n+m}},\ n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Déterminer, s'ils existent, le maximum, le minimum et les bornes supérieure et inférieure de A.

★ Savoir déterminer une forme explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1 ou 2.

Exercice 6 [Solution]

Déterminer des expressions explicites des suites (u_n) définies par

1. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$.
2. $u_0 = 1,\ u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

★ Être autonome pour déterminer la nature d'une suite définie par récurrence.

Exercice 7 [Solution]

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

Étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n).

★ Déterminer la nature d'une suite définie implicitement.

Exercice 8 [Solution]

1. Montrer que l'équation $x + \tan(x) = n$ d'inconnue $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ possède une unique solution x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]
Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$k^2\pi - 1 < \lfloor k^2\pi \rfloor \leqslant k^2\pi\,.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2\pi - 1) < \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\lfloor k^2\pi \rfloor \leqslant \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\pi$$

i.e.

$$\underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\pi - \frac{1}{n^2}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{3}} < S_n \leqslant \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\pi}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{3}}\,.$$

D'après le théorème d'encadrement, (S_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 2 [Enoncé]
Montrons que (S_n) est croissante et majorée.

• <u>Croissance</u>

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k+1} - \frac{1}{n+k}\right)$.

D'où, par télescopage, $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} \geqslant 0$

On en déduit que la suite (S_n) est croissante.

• <u>Majoration</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est une somme de n termes dont le plus grand est le premier terme $\dfrac{1}{n+1}$.

On en déduit que : $S_n \leqslant \underbrace{\dfrac{n}{n+1}}_{\leqslant 1}$ et ainsi (S_n) est majorée par 1.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite (S_n) converge.

Exercice 3 [Enoncé]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{n+1} - u_n - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \dfrac{-1}{n(n+1)^2} < 0$.

Ainsi (v_n) est décroissante.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes par conséquent elles convergent vers la même limite.

Exercice 4 [Enoncé]

1. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos(n)\cos(1) \quad \text{et} \quad \cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1\,.$$

2. On va raisonner par l'absurde. Supposons que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note l sa limite.
Les suites $(\cos(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n-1))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l. Par passage à la limite dans la question précédente, on obtient

$$2l = 2l\cos(1) \text{ donc } l = 0.$$

La suite $(\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Par passage à la limite dans la question précédente, on obtient

$$l = 2l^2 - 1 \text{ i.e. } 0 = 1\,. \text{ Absurde.}$$

Conclusion : la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 5 [Enoncé]
Considérons $A = \left\{ \frac{n+\sqrt{m}}{\sqrt{n}+m},\ n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$.
L'ensemble A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. En effet, $1 \in A$ et $\forall a \in A,\ a > 0$.
Donc A admet une borne inférieure.
De plus $\underbrace{\dfrac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{1}+n}}_{\in A} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $\inf(A) = 0$.
Or $0 \notin A$, donc A n'admet pas de minimum.
Par ailleurs, $\underbrace{\dfrac{n+\sqrt{1}}{\sqrt{n}+1}}_{\in A} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc A n'admet pas de borne supérieure, ni de maximum.

Exercice 6 [Enoncé]

1. C'est une suite arithmético-géométrique.
   (a) Recherche du point fixe

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. \quad x = 2x+1 \Leftrightarrow x = -1$$

   (b) Recherche de la raison de la suite auxiliaire
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n - (-1) = u_n + 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2(u_n+1) = 2w_n$$

   La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0 = u_0 + 1 = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 2^n$$

   (c) Expression du terme général
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = w_n - 1$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1$$

2. L'équation caractéristique associée à cette suite est $r^2 = 4r - 4$ de discriminant $\Delta = 16 - 16 = 0$. Cette équation admet donc une racine double $x = \frac{4}{2} = 2$. On en déduit la forme du terme général de la suite (u_n)

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (A + nB) \times 2^n$$

   Les deux premiers termes de la suite imposent les valeurs de A et de B.

$$\begin{cases} u_0 = A = 1 \\ u_1 = (A+B) \times 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

   L'unique suite définie dans l'énoncé a un terme général de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1-n)2^n$.
3. L'équation caractéristique associée à cette suite est $r^2 = r - 1$ de discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$. Cette équation admet donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathbf{e}^{\frac{i\pi}{3}}$ et $r_2 = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathbf{e}^{-\frac{i\pi}{3}}$. On en déduit la forme du terme général de la suite (u_n) :

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + B\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$

   Les deux premiers termes de la suite imposent les valeurs de A et de B.

$$\begin{cases} u_0 = A = 1 \\ u_1 = A \times \frac{1}{2} + B \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = \sqrt{3} \end{cases}$$

   Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos(n\frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}\sin(n\frac{\pi}{3}) = 2\cos((n-1)\frac{\pi}{3})$.

Exercice 7 [Enoncé]
Notons $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'intervalle $[1, +\infty[$ est inclus dans le domaine de définition de f, de plus il est stable par f. Donc la suite (u_n) est bien définie.
Plus précisément, $[1,2]$ est un intervalle stable par f, donc $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

La fonction f est décroissante sur $[1, 2]$ donc $f \circ f$ est croissante sur $[1, 2]$. On montrer facilement par récurrence que (u_{2n}) est croissante et que (u_{2n+1}) est décroissante. Ces deux suites sont bornées donc convergentes. Leurs limites respectives sont dans $[1; 2]$ et sont solutions de l'équation $x = f \circ f(x)$ (car $f \circ f$ est continue) d'inconnues réelles x. Or, pour tout $x \in [1, 2]$,

$$x = f \circ f(x) \iff x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \iff x = 1 + \frac{x}{x+1} \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \iff x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

D'où (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. D'où (u_n) converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 8 [Enoncé]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons la fonction f_n définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ telle que $f_n : x \mapsto x + \tan(x) - n$. Cette fonction est strictement croissante et continue. De plus, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$.

   D'après le corollaire du TVI, f_n s'annule une unique fois sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ i.e. il existe un unique $x_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x_n + \tan(x_n) = n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f(x_{n+1}) = x_{n+1} + \tan(x_{n+1}) - n = n + 1 - n = 1 > 0 = f(x_n)$. Or f est strictement croissante d'où $x_{n+1} > x_n$. On en déduit que (x_n) est croissante. De plus, (x_n) est majorée, d'où (x_n) converge vers $\ell \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par l'absurde, supposons que $\ell \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors,

   $$\underbrace{x_n + \tan(x_n)}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} l + \tan(l) \in \mathbb{R}} = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

   On arrive à une absurdité grâce à l'unicité de la limite. Donc (x_n) converge vers $\frac{\pi}{2}$.