Chapitre 1 : Logique et raisonnement mathématique

★ Écrire la négation d'une proposition afin de montrer qu'elle est fausse.

Exercice 1 [Solution]
Démontrer que les propositions suivantes sont fausses.

(a) « $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leqslant y$ »
(b) « $\exists x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \leqslant y$ »
(c) « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leqslant y$ »
(d) « $\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ x \leqslant y \Rightarrow \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$ »
(e) « $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}_+,\ ac \leqslant bc \Rightarrow a \leqslant b$ »

★ Raisonner par contraposée.

Exercice 2 [Solution]
Soit a et b deux réels. Montrer que si $a+b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.
Que pensez-vous de la réciproque ?

★ Raisonner par l'absurde.

Exercice 3 [Solution]
Démontrer que si vous rangez $n+1$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

★ Raisonner par analyse-synthèse.

Exercice 4 [Solution] Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\forall z \in \mathbb{R},\ f(z) = z$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z},\ f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z},\ f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2)$.

★ Rédiger une récurrence simple, double ou forte.

Exercice 5 [Solution]
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(u_0 + \cdots + u_n) \end{cases}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

★ Raisonner par double implication.

Exercice 6 [Solution]
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3|n^3 + 1 \Leftrightarrow 3|n+1$.

Correction des exercices

Exercice 1 [Enoncé]

(a) Montrons la négation de « $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leqslant y$ » i.e. montrons que « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} > y$ ».
Posons $y = -1$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $y < 0 \leqslant \sqrt{x}$.

(b) Montrons la négation de « $\exists x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \leqslant y$ » i.e. montrons que « $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, \sqrt{x} > y$ ».
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Posons $y = -1$. On a $y < 0 \leqslant \sqrt{x}$.

(c) Montrons la négation de « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leqslant y$ » i.e. montrons que « $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} > y$ ».
Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = y^2 + 1$. On a $\sqrt{x} = \sqrt{y^2+1} > |y| \geqslant y$.

(d) Montrons la négation de « $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \ x \leqslant y \Rightarrow \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$ » i.e. montrons que « $\exists x, y \in \mathbb{R}^*, \ x \leqslant y$ et $\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$ ».
Posons $x = -1$ et $y = 1$. On a bien $x \leqslant y$ et $\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$.

(e) Montrons la négation de « $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}_+, \ ac \leqslant bc \Rightarrow a \leqslant b$ » i.e. montrons que « $\exists a, b \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}_+, \ ac \leqslant bc$ et $a > b$ ».
Posons $a = 2$, $b = 1$ et $c = 0$. On a bien $ac \leqslant bc$ et $a > b$.

Exercice 2 [Enoncé]
Soit a et b deux réels. Raisonnons par contraposée. Supposons que a et b sont rationnels. Il existe $p_a, p_b \in \mathbb{Z}$ et $q_a, q_b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \frac{p_a}{q_a}$ et $b = \frac{p_b}{q_b}$. Par conséquent, $a + b = \frac{p_a q_b + p_b q_a}{q_a q_b}$ s'écrit comme le quotient de deux entiers, c'est donc un rationnel. On vient de montrer que si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.
La réciproque est fausse. En effet, pour $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{2}$, a est irrationnel et $a + b = 0$ ne l'est pas.

Exercice 3 [Enoncé]
On fait un raisonnement par l'absurde. Supposons que tous les tiroirs contiennent au plus une paire de chaussettes. Alors il y aura au plus $1 + 1 + \cdots + 1 = n$ paires de chaussettes, ce qui contredit qu'il y en a $n + 1$. Donc un tiroir contient au moins deux paires de chaussettes.

Exercice 4 [Enoncé]
On raisonne par analyse-synthèse.
<u>Analyse :</u> Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\forall z \in \mathbb{R}, \ f(z) = z$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, \ f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, \ f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2)$.

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $f(a + \mathbf{i}b) = f(a) + f(\mathbf{i}) f(b) = a + f(\mathbf{i}) b$.
De plus, $f(\mathbf{i})^2 = f(\mathbf{i}^2) = f(-1) = -1$. Donc $f(\mathbf{i}) = \mathbf{i}$ ou $f(\mathbf{i}) = -\mathbf{i}$.
Par conséquent, $f : z \mapsto z$ ou $f : z \mapsto \overline{z}$.
<u>Synthèse :</u> Les deux fonctions de la variable complexe $f_1 : z \mapsto z$ et $f_2 : z \mapsto \overline{z}$ vérifient bien les propriétés de l'énoncé.
<u>Conclusion :</u> Les fonctions $f_1 : z \mapsto z$ et $f_2 : z \mapsto \overline{z}$ sont les seules qui vérifient le problème posé.

Exercice 5 [Enoncé]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: "$u_n = 1$".
Démontrons par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

- <u>Initialisation :</u> $u_0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.
- <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(k)$ soit vraie pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.
$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(u_0 + \cdots + u_n) = \frac{1}{n+1}\underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{n+1 \text{ termes}} = \frac{n+1}{n+1} = 1$$
Donc $P(n+1)$ est vraie.
- <u>Conclusion :</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

Exercice 6 [Enoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $3|n+1$. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 3k$. D'où $(n+1)^3 = 27k^3$ i.e. $n^3 + 3n^3 + 3n + 1 = 27k^3$.
Donc $n^3 + 1 = 3\underbrace{(9k - n^2 - n)}_{\in \mathbb{N}}$. Par conséquent, $3|n^3 + 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On raisonne par contraposée.
Supposons que 3 ne divise pas $n+1$. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 3k+1$ ou $n+1 = 3k+2$.
Dans le premier cas, $(n+1)^3 = (3k+1)^3$ d'où $n^3+1 = 3(9k^3+9k^2+3k-n(n-1))+1$ n'est pas divisible par 3.
Dans le second cas, $(n+1)^3 = (3k+2)^3$ d'où $n^3+1 = 3(9k^3+18k^2+12k-n(n-1)+2)+2$ n'est pas divisible par 3.

Par double implication, $3|n^3+1 \Leftrightarrow 3|n+1$.