



THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *13 Juin 2018* par :

HUGO BRINGUIER

Marches quantiques ouvertes

JURY

STÉPHANE ATTAL	Université Lyon 1	Examineur
DENIS BERNARD	École Normale Supérieure	Rapporteur
LAURENT BRUNEAU	Université Cergy-Pontoise	Rapporteur
PATRICK CATTIAUX	Université Toulouse 3	Directeur de thèse
LAURE COUTIN	Université Toulouse 3	Examinatrice
YAN PAUTRAT	Université Paris-Sud	Examineur
CLÉMENT PELLEGRINI	Université Toulouse 3	Directeur de thèse

École doctorale et spécialité :

MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées

Unité de Recherche :

Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)

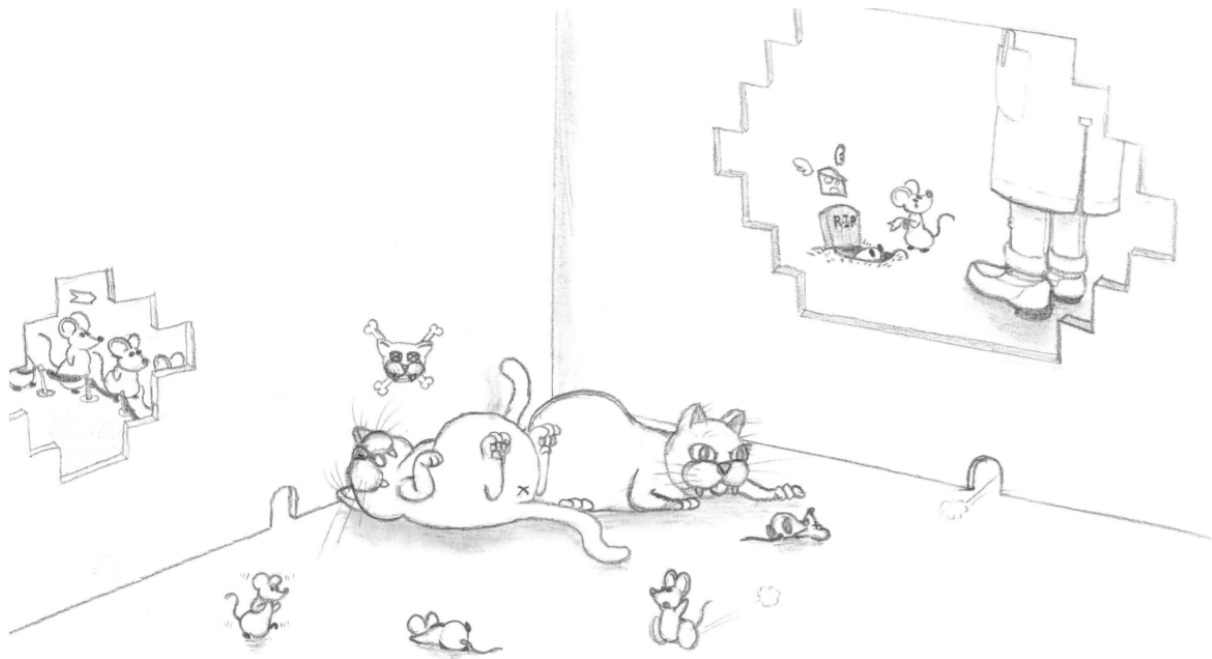
Directeurs de Thèse :

Patrick Cattiaux et Clément Pellegrini

Rapporteurs :

Denis Bernard et Laurent Bruneau

À la santé de tout le monde,



Le Mushu de Schrödinger par Roman Bringuier

Remerciements

Comme il se doit, je commence ce manuscrit par quelques lignes¹ visant à remercier ceux qui m'ont entouré pendant ces trois années de thèse.

Je souhaite en premier lieu exprimer ma sincère reconnaissance envers mes encadrants Clément Pellegrini et Patrick Cattiaux. Après m'avoir enseigné les mathématiques à l'université, ils m'ont fait partager leur passion pour le domaine des probabilités et fait découvrir le monde de la recherche. Merci à Clément pour son investissement, sa patience, ainsi que toutes les qualités qui font de lui un excellent directeur de thèse ; merci à Patrick, que j'ai moins sollicité, pour sa bienveillance et ses remarques pertinentes.

Je tiens à remercier Denis Bernard et Laurent Bruneau d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit. La qualité et la rigueur de leur travail m'ont beaucoup aidé pour en achever la rédaction. Je tiens aussi à remercier les autres membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont prêté à mes travaux de recherche. Merci à Stéphane Attal pour l'organisation de multiples rencontres scientifiques, merci à Laure Coutin pour son investissement dans ma formation et merci à Yan Pautrat d'avoir joué le rôle de directeur de thèse parisien.

Je remercie également tous les membres de l'Institut de Mathématiques de Toulouse qui ont participé de près ou de loin au bon déroulement de cette thèse, et notamment le pôle administratif.

Je suis heureux (et chanceux) d'avoir pris part au programme ANR StoQ, celui-ci m'a permis de participer aux conférences tenues à Toulouse, Paris, Lyon, Autrans, Cargèse et Durban. Je garde de très bons souvenirs de ces rencontres, ainsi qu'une jolie cicatrice. Je remercie les fondateurs de ce projet ainsi que toutes les personnes liées à cette grande famille scientifique. Outre les personnes déjà citées, une pensée particulière pour Tristan le matelot méditerranéen qui m'a apporté une aide quasi quotidienne, pour Ivan un aveyronnais de souche détenteur du théorème des lumières ainsi que pour Ion, Simon, Cécilia, Antoine, Cambyse et tous les autres.

Je souhaiterais remonter un peu dans le temps pour remercier mes professeurs pour leurs enseignements et l'envie qu'ils m'ont transmise de continuer dans cette voie, plus particulièrement je remercie Patricia Geniez, Jean-Christophe Feauveau et Katy Paroux. Durant ces années studieuses, j'ai rencontré des camarades fabuleux, pour en citer quelques-uns : Brevier, Marine, Sylvain, Maxou, Damien, JP, Lacaze, Théo et Elsa.

Je voudrais également remercier chaleureusement les exilés du bureau 105. Il y a ceux qui ont fait un passage éclair, Andressa, Pascal, Maël et Mickael², puis ceux qui ont fait plusieurs passages éclairs : Guillaume et Laure. Le premier est un escrimeur, démineur, toulousain, roumanophile, défenseur des oranges-outans et compagnon de débat, tandis que

1. Les allergiques aux mathématiques peuvent lire sereinement cette partie, il leur est néanmoins déconseillé de continuer la lecture car les équations sont parfois "undrinkable".

2. Meilleur organisateur d'événements pour les doctorants ESP : # TEAMKIKI.

la deuxième est une basketteuse, relectrice de talent, gersoise (mais aveyronnaise aussi), dont le sourire platypussien a égayé le bureau toutes ces années.

Je remercie tous mes autres collègues doctorants, et notamment la "team coinche" de l'Upsidum. Merci à Ioana pour avoir supporté Guillaume et mon poisson rouge, Antoine pour sa transformation végano-provinciale, Pierre pour sa présence matinale lors de multiples formations, Valentin pour son amour des toboggans et de la Fraboise, Maylis pour son lancer de Pouetpouet, Wuilliam pour ces punchlines Valdesques, Fabien pour son petit pain, Eva pour sa convexité et merci à tous ceux qui ont su créer une ambiance chaleureuse au second étage du 1R1 : Sylvain, Malika, Claire, Fanny, Kevin T., Magali, Camille, Valentin le Stagiaire, etc. Je remercie également les doctorants des autres équipes avec qui j'ai passé de bons moments : Anton, Silvère, Baptiste, Anne, Laura, Ibrahim, Jules, Jbar, Kévin F., Julie, Hang, Dat, Maria, Alexis, Florian, Jean-Marc, Elena et ceux que j'oublie honteusement.

Il est venu le temps de remercier les amis en dehors des mathématiques. Merci à Casparou³ et Mélissa pour les pizzas choucroutes accompagnées d'une Ethik'être. Merci au gang de Saint Michel (anciennement appelé "Bellevue's ***holes") pour la vie saine que l'on mène depuis 9 ans ; pour citer quelques-uns de ses membres : el Pinos ("elles partagent les goûts"), Petdouch ("la daurade c'est pour tout le monde"), Alex ("ayoooooooo") et Olivier (le frère de Natacha, soi-disant anglais⁴).

Je vais à présent remercier ma principale source de motivation : la famille. Merci à la famille artiguoise au grand complet, vivement le baptême de la petite Lily. Merci à mes grands-parents de m'avoir donné tout leur amour, c'est grâce à eux que je parle avec fierté de mes racines aveyronnaises. Merci à mes parents, principaux responsables de ma réussite, pour leur soutien inconditionnel. Merci à mon frère et à sa future femme, pour leur choix de témoin et pour m'avoir supporté toutes ces années. Et enfin, merci à celle pour qui aucun mot ne peut exprimer ma gratitude et mon amour, je veux juste lui dire...

bizbiz!

3. OufOuf.

4. 12 en anglais au baccalauréat.

Avant-propos

Cette thèse est consacrée à l'étude de modèles stochastiques issus de la mécanique quantique, et plus particulièrement à l'analyse des *marches quantiques ouvertes*. L'objectif de cette thèse est d'étudier ces marches en tant qu'extensions de marches aléatoires classiques. En effet, elles apparaissent comme des analogues quantiques de ces dernières.

Les marches aléatoires sont des objets mathématiques qui forment un champ d'investigation théorique ouvrant de nombreuses pistes de recherche. Le modèle de base correspond à la marche aléatoire simple, introduite pour la première fois par G. Pólya en 1921 ([Pól21]). Dans celui-ci, un marcheur évolue sur un réseau en sautant à intervalles réguliers vers un de ses plus proches voisins, de manière équiprobable et indépendamment des pas précédents. Au-delà de cette première modélisation, il peut être pertinent d'introduire des règles plus complexes que les simples sauts réguliers vers les plus proches voisins pour régir les pas du marcheur. Il est donc judicieux d'étudier des modèles spécifiques de marches aléatoires, et plus précisément des modèles introduisant des phénomènes de mémoire. Les marches quantiques s'inscrivent dans cette réflexion.

Les marches quantiques décrivent l'évolution d'une particule sur un réseau dont les transitions sont sujettes à des phénomènes quantiques. Ces phénomènes sont régis par un paramètre que l'on nomme le degré interne de la particule. Les sauts successifs de site en site sont décrits par un processus de Markov appelé trajectoire quantique. Plus précisément, une trajectoire quantique est la donnée de deux processus : le premier donne la position du marcheur (position de la particule) et le deuxième représente le paramètre quantique (évolution interne de la particule). Il est alors naturel de s'intéresser aux propriétés usuelles permettant d'analyser la position du marcheur : irréductibilité, ergodicité, etc. Néanmoins, contrairement aux marches aléatoires classiques, la composante quantique introduit un effet de mémoire. Le processus représentant la position du marcheur n'est alors pas nécessairement markovien. Les résultats sur les processus de Markov classiques ne se transposent donc pas aux marches quantiques ; c'est pourquoi les propriétés fines sur ces modèles nécessitent des études spécifiques.

Il existe différentes extensions de marches aléatoires dans le cadre quantique, dont l'une des premières fut introduite dans [ADZ93]. Les modèles les plus étudiés sont les *marches quantiques unitaires*. Ce type d'évolutions inspire de nombreuses études théoriques ([Kem03, Kon02, Joy11, Joy12]) et trouve de multiples applications en information quantique ([AAKV01, NC10]). Ces marches adoptent un comportement non standard à l'infini. En effet, elles satisfont un théorème central limite mais la convergence est en " n " au lieu d'être en " \sqrt{n} ". De plus la distribution limite n'est pas gaussienne mais a une allure de courbe en "baignoire" ([Kon02]).

Les marches quantiques autour desquelles s'articule cette thèse sont les marches quantiques ouvertes.

Ces marches quantiques sont dites ouvertes car elles s'inscrivent dans l'étude de la

dynamique des systèmes quantiques ouverts ([Att17, AJP06, BP02, Dav76]). Un système quantique est qualifié d’ouvert s’il interagit avec un environnement extérieur (bain de chaleur, laser, ...). Les dynamiques qui découlent des systèmes ouverts sont modélisées par des évolutions hamiltoniennes et markoviennes ([BR12]). Les évolutions hamiltoniennes décrivent le système de façon globale, c’est-à-dire le système d’étude couplé avec son environnement. Malheureusement, la complexité de l’environnement ne permet pas d’avoir systématiquement accès à toutes les données du système global. Dans ce cas, l’environnement est délaissé et les dynamiques du système d’étude sont régies par des évolutions markoviennes. L’ensemble de mes travaux s’inscrit dans l’approche markovienne dans laquelle deux types d’évolutions se distinguent : celles à temps discret dirigées par des canaux quantiques ([NC10, BŽ17, Wol12]) et celles à temps continu guidées par des opérateurs de Lindblad ([Lin76, GKS76]).

Les marches quantiques ouvertes à temps discret ont été introduites en 2012 par S. Attal, F. Petruccione, C. Sabot et I. Sinayskiy ([APSS12]). Ces marches ont donné lieu à diverses études théoriques décrivant la position du marcheur dans lesquelles un théorème central limite et un principe de grandes déviations ont été prouvés ([AGPS15, CP15]). Les marches quantiques ouvertes étant des généralisations de marches aléatoires classiques, des notions telles que l’irréductibilité et la périodicité ont été introduites ([CP16b]). Toujours dans l’optique d’étudier les marches quantiques ouvertes à travers cette analogie, les temps de sortie et d’atteinte ainsi que les problèmes de Dirichlet ont été étudiés dans [BBP17].

Ces marches ont également inspiré des modèles à temps continu : les marches quantiques ouvertes à temps continu définies par C. Pellegrini. Ces modèles, décrivant la dynamique continue d’une particule sur un graphe, apparaissent naturellement comme limites continues en temps de marches quantiques ouvertes discrètes ([Pel14]). Les trajectoires quantiques associées sont régies par des équations différentielles stochastiques avec sauts. Contrairement au cas discret, le paramètre interne évolue au cours du temps même si le marcheur reste immobile ; l’évolution est alors donnée par une équation différentielle déterministe. Les temps de saut sont quant à eux aléatoires et dépendent de la position ainsi que du paramètre quantique. Les trajectoires quantiques sont donc des processus markoviens déterministes par morceaux ([Dav84]).

D’autres modèles de limites continues ont été développés dans [BBT14], où des limites en temps et en espace ont été considérées. Dans cet article, les auteurs ont introduit la notion de mouvement brownien quantique ouvert qui, comme son nom l’indique, est une extension quantique du mouvement brownien.

L’objet de mes travaux de recherche est l’étude des marches quantiques ouvertes à temps continu (introduites dans [Pel14]). Nous étudions les propriétés classiques associées aux chaînes de Markov et les théorèmes asymptotiques pour ce type de marches. J’ai notamment démontré un théorème central limite et un principe de grandes déviations pour la position du marcheur ([Bri17]). Parmi les outils probabilistes employés pour prouver ces résultats, on retrouve entre autres l’équation de Poisson ([MS02]), le problème de martingale ([EK86]), le théorème central limite pour les martingales ([CP05]) et le théorème de Gärtner-Ellis ([DZ10]). Nous avons également étudié les propriétés de récurrence et de transience ([BBPP18]). Les objets manipulés dans ces articles sont des opérateurs à trace, des semi-groupes de Markov quantiques et des équations différentielles stochastiques avec sauts. Mes travaux actuels portent sur la théorie du potentiel associée à ces marches.

Nous proposons ci-dessous de décrire l’organisation du manuscrit de thèse. Il est constitué de deux parties : la première est une présentation générale des marches quantiques ouvertes alors que la seconde rassemble les articles rédigés au cours de cette thèse.

Détaillons brièvement le contenu de la première partie.

- Le premier chapitre donne une vue d'ensemble de la théorie des systèmes quantiques ouverts et justifie l'intérêt des modèles décrits dans les autres chapitres. Le lecteur pourra y trouver le bagage nécessaire afin de comprendre les axiomes mathématiques de la mécanique quantique. Plus particulièrement, les dynamiques discrètes et continues des systèmes quantiques ouverts sont exposées ; elles sont respectivement dirigées par des canaux quantiques et des opérateurs de Lindblad. Ces opérateurs sont fondamentaux dans la définition des marches quantiques ouvertes.
- Le deuxième chapitre rassemble les différents résultats sur les marches quantiques ouvertes à temps discret ([APSS12]) : théorème central limite [AGPS15], principe de grandes déviations [CP15], irréductibilité [CP16b], temps d'atteinte [BBP17], etc. Nous étudions particulièrement le lien avec les modèles classiques ; plus précisément, nous montrons que les marches quantiques ouvertes sont des généralisations de marches aléatoires classiques. Nous illustrons les notions étudiées à l'aide d'exemples et nous donnons quelques idées de preuves qui sont réemployées pour les modèles continus.
- Le troisième chapitre est consacré à l'étude des marches quantiques ouvertes à temps continu ([Pel14]). Nous présentons les résultats établis dans cette thèse ([Bri17, BBPP18]) en illustrant notre propos avec des exemples et en faisant le lien avec le modèle discret, ainsi qu'en exposant les différences qui peuvent survenir. Nous étudions également le lien avec les marches aléatoires classiques. Très peu d'éléments de preuves sont présents dans ce chapitre, nous exposons uniquement les outils probabilistes utilisés dans les démonstrations.
- Le quatrième chapitre rassemble quelques perspectives qui font suite à cette thèse. Une première piste de recherche consiste à s'intéresser au problème de Dirichlet pour les marches quantiques ouvertes à temps continu. La solution de ce problème permet notamment de calculer la loi du temps d'atteinte d'un certain domaine pour le marcheur. La seconde piste, moins corrélée avec les travaux précédents, consiste à établir des tests d'hypothèses à partir de résultats asymptotiques sur les mesures répétées non destructives.

La seconde partie regroupe les articles rédigés durant cette thèse.

- Le cinquième chapitre est dédié à la présentation de l'article "*Central limit theorem and large deviation principle for continuous time open quantum walks*" accepté aux Annales Henri Poincaré ([Bri17]). Il s'articule autour d'un théorème central limite et d'un principe de grandes déviations pour les marches quantiques ouvertes continues. Les résultats sont exposés dans leur intégralité et sont illustrés par de multiples exemples.
- Le sixième chapitre est consacré à la présentation de l'article "*Recurrence and transience of continuous time open quantum walks*" qui est soumis aux Annales Henri Poincaré et qui a été rédigé en collaboration avec I. Bardet, Y. Pautrat et C. Pellegrini [BBPP18]. Cet article aborde les questions d'irréductibilité, de transience et de récurrence pour les marches quantiques ouvertes à temps continu. La dualité récurrence-transience du cadre classique n'est plus vérifiée, néanmoins trois situations distinctes apparaissent dans le cadre des marches quantiques ouvertes.

Table des matières

I	Introduction et présentation des résultats	1
1	Système quantique ouvert	3
1.1	Les axiomes de la mécanique quantique	4
1.1.1	1 ^{er} axiome : les états	4
1.1.2	2 ^e axiome : mesure des observables	4
1.1.3	3 ^e axiome : réduction du paquet d’onde	5
1.1.4	4 ^e axiome : évolution temporelle du système	5
1.2	Système quantique ouvert	6
1.2.1	Système couplé	6
1.2.2	Trace partielle	7
1.2.3	Matrices densité	8
1.2.4	1 ^{er} axiome étendu : les états	8
1.2.5	2 ^e axiome étendu : mesure des observables	9
1.2.6	3 ^e axiome étendu : réduction du paquet d’onde	9
1.2.7	4 ^e axiome étendu : évolution temporelle du système	9
1.3	Interaction et évolution : cas discret	10
1.3.1	Canal quantique	10
1.3.2	Représentation de Kraus	10
1.3.3	Applications complètement positives	12
1.4	Mesures quantiques répétées	13
1.4.1	Effet Zénon quantique	14
1.4.2	Trajectoires quantiques discrètes	15
1.5	Interaction et évolution : cas continu	17
1.6	Trajectoires quantiques continues	18
1.6.1	Mesure sur les trajectoires quantiques	19
1.6.2	Équation de Schrödinger stochastique avec processus de saut	20
1.7	Trajectoires quantiques : du discret au continu	21
2	Marches quantiques ouvertes à temps discret	25
2.1	Définition du modèle	25
2.2	Lien avec les chaînes de Markov classiques	28
2.3	Exemple	29
2.4	Trajectoires quantiques	30
2.5	Propriétés	34
2.5.1	Irréductibilité	34
2.5.2	Transience et récurrence	36
2.6	Théorèmes asymptotiques pour les marches quantiques ouvertes homogènes sur \mathbb{Z}^d	39
2.6.1	Théorème ergodique	40
2.6.2	Théorème central limite	40

2.6.3	Principe de grandes déviations	42
3	Marches quantiques ouvertes à temps continu	47
3.1	Définition du modèle	48
3.2	Lien avec les chaînes de Markov à temps continu	50
3.3	Exemple	51
3.4	Développement de Dyson	52
3.5	Trajectoires quantiques	53
3.5.1	Mesure sur les trajectoires quantiques	54
3.5.2	Équation maîtresse stochastique pour les marches quantiques ouvertes	55
3.5.3	Exemple et cas particuliers	57
3.5.4	Lien avec les marches quantiques ouvertes	58
3.6	Des marches quantiques ouvertes discrètes vers celles continues	59
3.7	Propriétés	60
3.7.1	Irréductibilité	60
3.7.2	Transience et récurrence	62
3.8	Théorèmes asymptotiques pour les marches quantiques ouvertes sur \mathbb{Z}^d . . .	66
3.8.1	Théorème ergodique	67
3.8.2	Théorème central limite	68
3.8.3	Principe de grandes déviations	70
4	Perspectives	75
4.1	Problème de Dirichlet	75
4.2	Mesures quantiques non destructives	77
4.2.1	Modèle	78
4.2.2	Loi des grands nombres	81
4.2.3	Théorème central limite et théorème de Berry-Esseen	82
4.2.4	Tests d'hypothèses	85
	Bibliographie.	87
II	Présentation des articles	95
5	Central limit theorem and large deviation principle for continuous time open quantum walks	97
5.1	Introduction	98
5.2	Continuous Time Open Quantum Walks	99
5.2.1	Main setup	99
5.2.2	Quantum trajectories	101
5.3	Central Limit Theorem	103
5.4	Large Deviation Principle	110
5.5	Examples	114
6	Recurrence and transience of continuous time open quantum walks	123
6.1	Continuous time open quantum walks and their associated classical processes	125
6.1.1	Definition of continuous-time open quantum walks	125
6.1.2	Dyson expansion and associated probability space	126
6.1.3	Quantum trajectories associated to CTOQW	128
6.1.4	Connection between Dyson expansion and quantum trajectories . . .	130
6.2	Irreducibility of quantum Markov semigroups	132

6.3	Transience and recurrence of irreducible CTOQW	134
6.3.1	Definition of recurrence and transience	135
6.3.2	Technical results	136
6.3.3	Proof of Theorem 6.2	138

Première partie

**Introduction et présentation des
résultats**

Chapitre 1

Systeme quantique ouvert

Sommaire

1.1	Les axiomes de la mécanique quantique	4
1.2	Systeme quantique ouvert	6
1.3	Interaction et évolution : cas discret	10
1.4	Mesures quantiques répétées	13
1.5	Interaction et évolution : cas continu	17
1.6	Trajectoires quantiques continues	18
1.7	Trajectoires quantiques : du discret au continu	21

L'objectif de ce chapitre est de présenter le cadre mathématique permettant d'étudier les systèmes quantiques ouverts ([BP02]).

Afin d'étudier un système quantique, on réalise des mesures de la quantité physique (position, vitesse, énergie, ...) à laquelle on s'intéresse. Contrairement au cadre de la physique classique, le résultat d'une mesure est aléatoire et affecte définitivement le système quantique étudié. On peut toutefois prédire les probabilités des résultats selon l'état du système. Ces différentes propriétés sont décrites par les axiomes fondamentaux de la mécanique quantique (axiome de la mesure, réduction du paquet d'onde, ...). Néanmoins, les mesures effectuées directement sur le système présentent un inconvénient. En effet, une succession de mesures trop rapprochées fige le système, ce phénomène est appelé l'effet Zénon quantique. C'est pourquoi, afin d'observer une dynamique significative, on couple le système d'étude à un système auxiliaire sur lequel on effectue une mesure après avoir laissé interagir les deux systèmes. En répétant cette procédure (couplage, interaction et mesure), on obtient une suite de résultats de mesures tout en ne dégradant pas totalement le système d'étude. De plus, grâce au phénomène d'intrication, on peut récolter une information partielle sur le système étudié.

Le principe d'interactions répétées ([AP06]) est présent dans de nombreux domaines de recherche ([BJM06, BJM10b, BJM14, BJM10a, ADP14, AJ07b, AJ07a]) notamment en optique quantique ([Bar06, Har03]), en information quantique ([GP01]) ou encore en thermodynamique quantique ([SSBE17]). Dans ce chapitre, nous présentons un cadre mathématique permettant de décrire le principe de mesures indirectes répétées en mécanique quantique. Celui-ci est au cœur de nombreux travaux de recherche en physique théorique et en mathématiques ([ADP14, BBB13, BBB12, Bel99, BJPP18, HJPR17, TBB15, PP09, Pel08]).

1.1 Les axiomes de la mécanique quantique

Dans cette partie, nous introduisons les bases de mécanique quantique permettant l'étude des systèmes quantiques ouverts. Nous énonçons les quatre axiomes principaux de la mécanique quantique.

1.1.1 1^{er} axiome : les états

L'espace de tous les états possibles d'un système quantique est un espace de Hilbert complexe séparable que l'on notera \mathcal{H} .

Les états possibles sont appelés les *fonctions d'onde* de \mathcal{H} . Une *fonction d'onde* est une classe d'équivalence de vecteurs de \mathcal{H} . Deux vecteurs sont dans la même classe d'équivalence si l'un est le multiple de l'autre par un scalaire non nul. On choisit ψ un représentant de norme 1 pour chaque *fonction d'onde*. Notons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, ψ et $e^{i\theta}\psi$ représentent le même état. La fonction d'onde contient toute l'information sur le système en question.

Avant de présenter les autres axiomes, on rappelle la notation des *Bras* et des *Kets* utilisée en physique.

Soit ψ un vecteur de \mathcal{H} , on définit le *Ket* $|\psi\rangle$ comme l'application linéaire :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle : \mathbb{C} &\rightarrow \mathcal{H} \\ \lambda &\mapsto \lambda\psi. \end{aligned}$$

Dans la suite, on identifie un vecteur ψ de \mathcal{H} avec le *Ket* $|\psi\rangle$ sans faire référence à l'application linéaire correspondante.

On appelle *Bra* $\langle\psi|$ la forme linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \langle\psi| : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{C} \\ y &\mapsto \langle\psi, y\rangle. \end{aligned}$$

Ci-dessous quelques propriétés élémentaires sur les Bras et les Kets :

1. Les Bras $\langle\psi|$ agissent sur les Kets $|y\rangle$:

$$\langle\psi||y\rangle = \langle\psi, y\rangle.$$

2. Étant donnés $u, v \in \mathcal{H}$, un opérateur de la forme $|u\rangle\langle v|$ agit sur les Kets $|y\rangle$ de la façon suivante :

$$|u\rangle\langle v||y\rangle = |u\rangle\langle v, y\rangle = \langle v, y\rangle u.$$

3. En particulier, si $\|u\| = 1$ alors $|u\rangle\langle u|$ est le projecteur orthogonal sur $Vect(u)$.

1.1.2 2^e axiome : mesure des observables

Toute quantité physique du système quantique qui peut être mesurée (par exemple : la position, la vitesse, l'énergie, ...) est représentée par un opérateur auto-adjoint sur \mathcal{H} . Ces opérateurs sont appelés *observables* du système.

Nous considérerons uniquement les observables X de spectre fini $\sigma(X) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$ où $q \in \mathbb{N}^*$. L'étude des observables de spectre plus général est effectuée dans [CTDLC79, Att17]. On note P_i les projecteurs orthogonaux sur les sous espaces propres de l'observable X , on a alors

$$X = \sum_{i=1}^q \lambda_i P_i.$$

Le résultat d'une mesure d'une observable X est un résultat aléatoire à valeurs dans $\sigma(X)$. Plus précisément, lorsque l'état du système est $|\psi\rangle$, le résultat de la mesure de X prend la valeur $\lambda_i \in \sigma(X)$ avec probabilité $\langle \psi, P_i \psi \rangle = \|P_i \psi\|^2$. On notera

$$\mathbb{P}(\text{observer } \lambda_i) = \|P_i \psi\|^2.$$

1.1.3 3^e axiome : réduction du paquet d'onde

La mesure d'une observable transforme l'état du système. Si l'on effectue une mesure de X quand l'état du système est $|\psi\rangle$, et que cette mesure vaut λ_i alors l'état du système devient

$$|\psi'\rangle = \frac{P_i |\psi\rangle}{\|P_i \psi\|}.$$

Remarque. Supposons que λ_i soit le résultat d'une première mesure de X , l'état du système devient alors $|\psi'\rangle = \frac{P_i |\psi\rangle}{\|P_i \psi\|}$. Comme $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$, une deuxième mesure de X renvoie λ_i avec probabilité 1. De plus, l'état du système reste inchangé suite à cette mesure.

Exemple 1.1. Dans l'exemple suivant, nous illustrons le fait que l'ordre dans lequel les mesures sont effectuées est important. Soit $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ muni de la base canonique (e_1, e_2) . Supposons que l'état du système est $|\psi\rangle = e_1$ et considérons les observables

$$X = |e_1\rangle\langle e_1| + 2|e_2\rangle\langle e_2| = P_1 + 2P_2$$

et

$$Y = |e_1\rangle\langle e_2| + |e_2\rangle\langle e_1| = \left| \frac{e_1 + e_2}{2} \right\rangle \left\langle \frac{e_1 + e_2}{2} \right| - \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right\rangle \left\langle \frac{e_1 - e_2}{2} \right| = Q_1 - Q_2.$$

On réalise deux expériences : dans la première on effectue une mesure de X puis une mesure de Y ; dans la deuxième l'ordre des mesures est inversé.

1. Si on obtient 1 lors d'une mesure de X et si ensuite on obtient 1 lors d'une mesure de Y , alors le système devient

$$|\psi'\rangle = \frac{Q_1 P_1 |\psi\rangle}{\|Q_1 P_1 \psi\|} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \right\rangle.$$

2. Si on obtient 1 lors d'une mesure de Y et si ensuite on obtient 1 lors d'une mesure de X , alors le système devient

$$|\psi'\rangle = \frac{P_1 Q_1 |\psi\rangle}{\|P_1 Q_1 \psi\|} = |e_1\rangle.$$

On vient d'illustrer le fait suivant : lorsque l'on effectue une mesure de X et une mesure de Y alors l'ordre dans lequel les mesures sont effectuées est important. Ce phénomène peut être observé dès lors que les projecteurs spectraux des observables X et Y ne commutent pas.

1.1.4 4^e axiome : évolution temporelle du système

Soit H l'observable qui représente l'énergie totale du système. Cette observable est communément appelée *hamiltonien* et contrôle la façon dont le système évolue en fonction du temps. La dynamique de l'état du système à l'instant t est régie par

$$d|\psi_t\rangle = -iH|\psi_t\rangle dt.$$

L'équation ci-dessus est appelée l'équation de *Schrödinger*. On pose $U_t = e^{-itH}$ pour tout t positif. Notons que $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ forme un groupe d'opérateurs unitaires sur \mathcal{H} . Si l'état initial du système est $|\psi_0\rangle$, alors l'état du système à l'instant t est

$$|\psi_t\rangle = U_t|\psi_0\rangle.$$

Cette formulation concerne l'évolution des états du système \mathcal{H} , elle est appelée *représentation de Schrödinger*.

Il existe une autre approche pour la dynamique : la *représentation d'Heisenberg*. Dans cette représentation équivalente, ce sont les observables qui évoluent dans le temps et non l'état du système. Si X désigne une observable, son évolution au cours du temps est donnée par

$$X_t = U_t^* X U_t.$$

Toutefois, nous utiliserons uniquement par la suite la représentation de Schrödinger. Nous avons décrit les axiomes de la mécanique quantique pour des systèmes fermés. Dans la section suivante, nous généralisons ces axiomes dans le cadre des systèmes ouverts.

1.2 Système quantique ouvert

Les modèles de cette thèse sont motivés par des situations physiques dans lesquelles un système quantique est en interaction avec un environnement extérieur (bain de chaleur, laser, ...). La complexité de l'environnement ne permet pas d'avoir accès à toutes les données du système global. On dit qu'un système est *ouvert* lorsqu'il subit une influence d'un système quantique extérieur et *fermé* dans le cas contraire. Le lecteur pourra consulter les ouvrages [AJP06, BP02, Dav76] pour obtenir plus de détails sur les systèmes quantiques ouverts.

1.2.1 Système couplé

Dans la suite, nous allons considérer un système quantique constitué de deux sous-systèmes quantiques. Pour cela, nous aurons besoin de la notion de produit tensoriel.

Définition - Proposition 1.1. Soient \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 deux espaces de Hilbert séparables. Soient $\phi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$. On note $\phi \otimes \psi$ la forme biantilinéaire sur $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ donnée par

$$\phi \otimes \psi(\phi', \psi') = \langle \phi', \phi \rangle \times \langle \psi', \psi \rangle.$$

On note E l'ensemble des combinaisons linéaires finies de formes biantilinéaires de la sorte. Si on considère E muni de la forme sesquilinéaire suivante :

$$\langle \phi \otimes \psi, \phi' \otimes \psi' \rangle_E = \langle \phi, \phi' \rangle \times \langle \psi, \psi' \rangle,$$

alors $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ est un espace préhilbertien. On note $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ son complété que l'on appelle produit tensoriel de \mathcal{H}_1 et de \mathcal{H}_2 .

Si les espaces d'états sont respectivement \mathcal{H} et \mathcal{K} , alors l'espace d'états du système quantique bipartite est le produit tensoriel :

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}.$$

Définition 1.1. On dit qu'un état $|\Psi\rangle$ du système de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ est :

- ▶ séparable s'il existe $|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$ états de \mathcal{H} et \mathcal{K} respectivement, tels que $|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$.
- ▶ intriqué sinon.

Remarque. Si l'état du système $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ est séparable alors une mesure sur le second système n'altère pas l'état du premier système. Pour un système dans un état intriqué, ce n'est plus le cas. On illustre ce fait dans l'exemple suivant.

Exemple 1.2. Soient \mathcal{H} et \mathcal{K} deux espaces de Hilbert tels que $\mathcal{H} = \mathcal{K} = \mathbb{C}^2$ et soit (e_1, e_2) une base orthonormale de \mathbb{C}^2 . Alors

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle \otimes |e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle \otimes |e_2\rangle$$

est un état intriqué de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. La mesure de l'observable

$$X = I \otimes (|e_1\rangle\langle e_1| + 2|e_2\rangle\langle e_2|)$$

renvoie 1 (resp. 2) avec probabilité $\frac{1}{2}$ et l'état du système devient $|e_1\rangle \otimes |e_1\rangle$ (resp. $|e_2\rangle \otimes |e_2\rangle$). La mesure effectuée sur \mathcal{K} affecte l'état sur le système \mathcal{H} .

Nous pouvons à présent considérer les systèmes bipartites, ces systèmes sont fondamentaux dans la description des systèmes quantiques ouverts.

1.2.2 Trace partielle

Notre but est d'introduire le moyen de décrire un système quantique \mathcal{H} à partir de la description du système $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Pour cela nous aurons besoin de la notion de trace partielle.

Pour un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} , on note $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ l'espace vectoriel normé des opérateurs à trace sur \mathcal{H} muni de la norme $\|\cdot\|_1$ où $\|\cdot\|_1 = \text{Tr}(|\cdot|)$. Pour tout g dans un espace de Hilbert séparable \mathcal{K} , on définit l'opérateur borné

$$\begin{aligned} |g\rangle_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \\ f &\mapsto f \otimes g. \end{aligned}$$

Cet opérateur admet pour adjoint ${}_{\mathcal{K}}\langle g|$ qui est l'unique opérateur borné sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ à valeurs dans \mathcal{H} tel que

$${}_{\mathcal{K}}\langle g|(u \otimes v) = \langle g, v \rangle u,$$

pour tout $u \in \mathcal{H}$ et $v \in \mathcal{K}$.

Définition - Proposition 1.2. Soient \mathcal{H} et \mathcal{K} deux espaces de Hilbert séparables et $T \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$. Alors pour toute base orthonormale $(g_n)_n$ de \mathcal{K} , la série

$$\sum_n {}_{\mathcal{K}}\langle g_n| T |g_n\rangle_{\mathcal{K}}$$

est $\|\cdot\|_1$ -convergente et ne dépend pas de la base choisie. On définit ainsi l'opérateur

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{K}} : \mathcal{I}_1(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \\ T &\mapsto \sum_n {}_{\mathcal{K}}\langle g_n| T |g_n\rangle_{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Pour $T \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, il s'avère que $\text{Tr}_{\mathcal{K}}(T)$ est l'unique opérateur à trace sur \mathcal{H} qui vérifie

$$\text{Tr}(\text{Tr}_{\mathcal{K}}(T)X) = \text{Tr}(T(X \otimes I)),$$

pour tout $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Énonçons maintenant quelques propriétés de la trace partielle.

Proposition 1.1. Les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. L'application $T \mapsto \text{Tr}_{\mathcal{K}}(T)$ est une application linéaire de $\mathcal{I}_1(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ dans $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$.
2. Si $T = X \otimes Y$, avec $X \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ et $Y \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ alors

$$\text{Tr}_{\mathcal{K}}(T) = \text{Tr}(Y)X.$$

3. Pour tout $T \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$,

$$\text{Tr}(\text{Tr}_{\mathcal{K}}(T)) = \text{Tr}(T).$$

4. Pour tout $T \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ et tout $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\text{Tr}(T(X \otimes I)) = \text{Tr}_{\mathcal{K}}(T)X.$$

La section suivante permet, grâce à la trace partielle, de décrire \mathcal{H} à partir de la description du système $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

1.2.3 Matrices densité

Considérons un système quantique bipartite $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ où \mathcal{H} est le système d'étude et \mathcal{K} est l'environnement extérieur. Malheureusement, l'état $|\Psi\rangle$ du système global $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ n'est souvent pas accessible car l'environnement est par exemple trop complexe. Néanmoins, nous allons définir un opérateur ρ sur \mathcal{H} permettant d'obtenir toutes les données souhaitées sur le système étudié \mathcal{H} .

Afin d'effectuer une mesure d'une observable X de \mathcal{H} , nous devons considérer l'observable $X \otimes I$ de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. On notera à nouveau P_i les projecteurs orthogonaux sur les sous espaces propres de X . Si $|\Psi\rangle$ est l'état du système de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{observer } \lambda_i) &= \langle \Psi, (P_i \otimes I)\Psi \rangle \\ &= \text{Tr}(|\Psi\rangle\langle\Psi|(P_i \otimes I)) \\ &= \text{Tr}(\text{Tr}_{\mathcal{K}}(|\Psi\rangle\langle\Psi|)P_i) \\ &= \text{Tr}(\rho P_i) \text{ avec } \rho = \text{Tr}_{\mathcal{K}}(|\Psi\rangle\langle\Psi|). \end{aligned}$$

La connaissance complète de $|\Psi\rangle$ n'est pas nécessaire : la connaissance de ρ est suffisante. En effet, si ρ est connu, on peut calculer toutes les probabilités associées à la mesure d'une observable X de \mathcal{H} .

On souhaite maintenant caractériser les opérateurs ρ construits comme ci-dessus. Le lecteur trouvera la démonstration du théorème suivant dans [CTDLC79, Att17].

Théorème 1.1. *Soit ρ un opérateur sur un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe un espace de Hilbert séparable \mathcal{K} et un vecteur unitaire $\Psi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ tels que $\rho = \text{Tr}_{\mathcal{K}}(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$.*
2. *L'opérateur ρ est autoadjoint, positif et de trace égale à 1.*

Dans ce cas là, l'opérateur ρ est appelé matrice densité.

Le théorème ci-dessus permet de généraliser les axiomes de base au cas des systèmes quantiques ouverts. On explicite cette généralisation dans ce qui suit.

1.2.4 1^{er} axiome étendu : les états

Un état quantique sur un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} est un opérateur ρ auto-adjoint positif de trace 1. De tels opérateurs sont appelés *matrices densité*. Il existe alors une base hilbertienne $(e_i)_i$ de \mathcal{H} telle que $\rho = \sum_i \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$ avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_i \lambda_i = 1$. L'ensemble de toutes les matrices densité de \mathcal{H} est noté $\mathcal{S}(\mathcal{H})$.

Le cas où $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, avec $\Psi \in \mathcal{H}$ de norme 1, correspond au cas où \mathcal{H} est un système quantique isolé. Dans ce cas là, on dira que ρ est un état pur.

Par ailleurs, on dit qu'un état strictement positif est fidèle.

1.2.5 2^e axiome étendu : mesure des observables

Soient \mathcal{H} un système quantique dans l'état ρ et X une observable de \mathcal{H} telle que

$$X = \sum_{i=1}^q \lambda_i P_i,$$

où P_i sont les projecteurs orthogonaux sur les sous espaces propres. Alors si le système est dans l'état ρ , la mesure de X prend la valeur λ_i avec probabilité $\text{Tr}(\rho P_i)$. On notera

$$\mathbb{P}(\text{observer } \lambda_i) = \text{Tr}(\rho P_i).$$

1.2.6 3^e axiome étendu : réduction du paquet d'onde

Voyons comment le postulat de la réduction du paquet d'onde est modifié lorsque l'on considère les systèmes quantiques ouverts.

3^e axiome étendu. Soient \mathcal{H} un système quantique et X une observable de \mathcal{H} telle que

$$X = \sum_{i=1}^q \lambda_i P_i \text{ avec } P_i \text{ les projecteurs orthogonaux sur les sous espaces propres.}$$

Si on effectue une mesure de X et que cette mesure vaut λ_i alors l'état du système devient

$$\rho' = \frac{P_i \rho P_i}{\text{Tr}(\rho P_i)}.$$

1.2.7 4^e axiome étendu : évolution temporelle du système

Le postulat de l'évolution temporelle du système est lui aussi modifié lorsqu'on considère les systèmes quantiques ouverts.

4^e axiome étendu. Si un système quantique \mathcal{H} est dans un état initial ρ_0 et si l'on note H l'hamiltonien du système, alors l'état du système vérifie l'équation différentielle suivante dite de Liouville :

$$d\rho_t = -i[H, \rho_t] dt.$$

L'évolution du système est donc de la forme :

$$\rho_t = U_t \rho_0 U_t^*,$$

où $U_t = e^{-itH}$ pour tout t positif.

Remarque. On considère un modèle complet d'interaction en introduisant l'hamiltonien H_I qui agit sur le produit tensoriel; l'hamiltonien total d'interaction $H_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}}$ est décrit par

$$H_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}} = H_{\mathcal{H}} \otimes I + I \otimes H_{\mathcal{K}} + H_I,$$

où $H_{\mathcal{H}}$ et $H_{\mathcal{K}}$ sont les hamiltoniens respectifs de \mathcal{H} et \mathcal{K} . Définissons alors une famille d'opérateurs unitaires $(U_t)_{t \geq 0}$ par $U_t = e^{-itH_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}}}$. L'évolution des états du produit tensoriel $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ est donc donnée par

$$\tilde{\rho}_t = U_t \tilde{\rho}_0 U_t.$$

La description de l'évolution sur \mathcal{H} est obtenue à l'aide de la trace partielle

$$\rho_t = \text{Tr}_{\mathcal{K}}(\tilde{\rho}_t).$$

Le processus $(\rho_t)_{t \geq 0}$ construit ci-dessus ne vérifie pas une équation différentielle de Liouville contrairement au processus $(\tilde{\rho}_{t \geq 0})$.

Finalement, comme un système quantique n'est jamais isolé, nous adopterons la description suivante d'un système quantique (ouvert ou non) : un système quantique est modélisé par un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} tel que les différents états du système sont représentés par des matrices densité.

1.3 Interaction et évolution : cas discret

Dans cette section, nous définissons un cadre suffisamment général permettant de décrire l'évolution d'un système quantique ouvert durant un laps de temps τ . Ce type d'évolution modélise de nombreuses situations physiques dans lesquelles le système que l'on cherche à étudier est en interaction avec un environnement extérieur. On verra que les applications permettant de décrire l'évolution des systèmes quantiques ouverts durant un certain laps de temps admettent une écriture spécifique due à Kraus [Kra83]. Le Chapitre 2 sur les marches quantiques ouvertes discrètes s'inspire des modèles présentés ci-dessous.

1.3.1 Canal quantique

Rappelons le cadre des systèmes quantiques ouverts. On étudie deux systèmes quantiques interagissant entre eux, que l'on note \mathcal{H} et \mathcal{K} respectivement. L'analyse présentée dans cette section se limitera au cas discret. On s'intéresse à l'évolution de ces deux systèmes durant un laps de temps τ . Ainsi, si l'hamiltonien du système couplé $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ est noté $H_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}}$ alors l'évolution du système est donnée par l'opérateur unitaire

$$U = e^{-i\tau H_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}}}.$$

Par ailleurs, tout unitaire de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ peut s'écrire sous la forme ci-dessus pour un certain hamiltonien de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

Toute transformation de l'état d'un système quantique \mathcal{H} est obtenue comme suit.

- Le système quantique \mathcal{H} , d'état initial ρ , est couplé à un autre système quantique \mathcal{K} d'état ω . L'état du système global $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ est donc $\rho \otimes \omega$.
- Les deux systèmes quantiques interagissent pendant un laps de temps τ via l'opérateur unitaire d'évolution U . Après l'interaction, l'état du système sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ devient $U(\rho \otimes \omega)U^*$.
- Le système \mathcal{K} est délaissé, l'état du système sur \mathcal{H} est alors donné par

$$\text{Tr}_{\mathcal{K}}(U(\rho \otimes \omega)U^*).$$

En raison de ces différents éléments, nous nous intéresserons aux canaux quantiques définis ci-dessous.

Définition 1.2. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable. On appelle *canal quantique* toute application linéaire T de la forme :

$$T : \begin{array}{ccc} \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \\ \rho & \longmapsto & \text{Tr}_{\mathcal{K}}(U(\rho \otimes \omega)U^*), \end{array}$$

où $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ est l'ensemble des opérateurs à trace sur \mathcal{H} , \mathcal{K} un espace de Hilbert séparable, ω un état sur \mathcal{K} et U un opérateur unitaire sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

Un canal quantique représente l'archétype d'une évolution discrète d'un système quantique bipartite. La section suivante expose une autre écriture possible pour un canal quantique.

1.3.2 Représentation de Kraus

Nous allons voir dans cette partie que les canaux quantiques admettent une écriture spécifique qui fait intervenir uniquement des opérateurs sur \mathcal{H} . Cette écriture présente l'avantage de ne plus expliciter le système quantique auxiliaire \mathcal{K} .

Théorème 1.2 (Représentation de Kraus [Kra83]). Soient \mathcal{H} et \mathcal{K} deux espaces de Hilbert séparables. Soient U un opérateur unitaire sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ et ω un état sur \mathcal{K} . Soit T le canal quantique tel que

$$T(X) = \text{Tr}_{\mathcal{K}}(U(X \otimes \omega)U^*)$$

pour tout $X \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$. Alors il existe une famille dénombrable $(M_i)_{i \in I}$ d'opérateurs bornés sur \mathcal{H} vérifiant

$$\sum_{i \in I} M_i^* M_i = I$$

où la série ci-dessus est $\|\cdot\|_{\infty}$ -convergente, telle que

$$T(X) = \sum_{i \in I} M_i X M_i^* \tag{1.1}$$

pour tout $X \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, où la série ci-dessus est $\|\cdot\|_1$ -convergente.

Le théorème ci-dessus nous permet d'obtenir la définition suivante.

Définition 1.3. La décomposition (1.1) d'un canal quantique T est appelée *décomposition de Kraus* du canal quantique.

Il existe également une réciproque du Théorème 1.2, que l'on énonce dans le théorème ci-dessous.

Théorème 1.3 (Stinespring [Sti55]). Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable. Soit T une application linéaire sur $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ de la forme

$$T(\cdot) = \sum_{i \in I} M_i \cdot M_i^*$$

où M_i sont des opérateurs bornés sur \mathcal{H} qui vérifient

$$\sum_{i \in I} M_i^* M_i = I,$$

au sens de la convergence forte. Alors il existe un espace de Hilbert séparable \mathcal{K} , une fonction d'onde ψ sur \mathcal{K} et un opérateur unitaire U sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ tels que

$$T(X) = \text{Tr}_{\mathcal{K}}(U(X \otimes |\psi\rangle\langle\psi|)U^*)$$

pour tout $X \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$.

Toute application de la forme (1.1) est alors un canal quantique. Illustrons sur un exemple comment obtenir la décomposition de Kraus pour un canal quantique spécifique.

Exemple 1.3. On exhibe ici un exemple pour lequel on trouve facilement une décomposition de Kraus d'un canal quantique. Posons \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable, $\mathcal{K} = \mathbb{C}^p$, $|\psi\rangle$ une fonction d'onde de \mathcal{K} et U unitaire sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Considérons le canal quantique suivant

$$\begin{aligned} T : \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \\ X &\longmapsto \text{Tr}_{\mathcal{K}}(U(X \otimes |\psi\rangle\langle\psi|)U^*). \end{aligned}$$

On pose $\mathcal{B}_{\mathcal{K}} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ base orthonormale de \mathcal{K} telle que $f_1 = \psi$. L'opérateur unitaire U de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ peut s'écrire par blocs

$$U = \sum_{i,j=1}^p U_{ij} \otimes |f_i\rangle\langle f_j|$$

où $U_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour tout $1 \leq i, j \leq p$. On obtient alors directement

$$\begin{aligned}
T(X) &= \text{Tr}_{\mathcal{K}}(U(X \otimes |\psi\rangle\langle\psi|)U^*) \\
&= \text{Tr}_{\mathcal{K}} \left(\left(\sum_{i,j=1}^p U_{ij} \otimes |f_i\rangle\langle f_j| \right) (X \otimes |\psi\rangle\langle\psi|) \left(\sum_{k,l=1}^p U_{kl}^* \otimes |f_l\rangle\langle f_k| \right) \right) \\
&= \text{Tr}_{\mathcal{K}} \left(\sum_{i,k=1}^p U_{i1} X U_{k1}^* \otimes |f_i\rangle\langle f_k| \right) \\
&= \sum_{i=1}^p U_{i1} X U_{i1}^*
\end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$. Le fait que U soit un opérateur unitaire entraîne que

$$\sum_{i=1}^p U_{i1}^* U_{i1} = I.$$

On a donc une formule explicite pour la décomposition de Kraus de notre canal quantique.

La décomposition de Kraus existe pour des applications plus générales, plus particulièrement pour les applications *complètement positives*. Définissons à présent ce type d'applications.

1.3.3 Applications complètement positives

Notre but est de caractériser mathématiquement la transformation la plus générale que puisse subir un état quantique d'un système quantique \mathcal{H} . Une transformation T de la sorte doit impérativement respecter les propriétés suivantes :

1. T est linéaire de $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ dans $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$.
2. T préserve la positivité.
3. T préserve la trace.

De plus, la deuxième propriété peut être renforcée. En effet, si l'on considère un système auxiliaire \mathcal{K} qui n'interagit pas avec \mathcal{H} , on souhaite que l'application $\tilde{T} = T \otimes I$, qui est l'extension naturelle de T sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, soit toujours une transformation d'états quantiques. Les première et troisième propriétés vérifiées par T sont aussi vérifiées pour \tilde{T} . Cependant, le fait que T préserve la positivité n'implique pas que \tilde{T} la préserve (voir Contre-exemple 1.1). Pour cela, il faut supposer que T est complètement positive, on définit donc cette notion ci-dessous.

Définition 1.4. Soit T un opérateur sur $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ où \mathcal{H} est un espace de Hilbert séparable. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur $T^{(n)} = T \otimes I_n$ sur $\mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est défini par

$$T^{(n)} \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \otimes |e_i\rangle\langle e_j| \right) = \sum_{i,j=1}^n T(A_{ij}) \otimes |e_i\rangle\langle e_j|,$$

où $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ est la base canonique de \mathbb{C}^n et $A_{i,j} \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Un opérateur T est dit :

- ▶ *n-positif* si l'opérateur $T^{(n)}$ est positif.
- ▶ *complètement positif* si l'opérateur T est *n-positif* pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On s'intéressera donc aux applications $T : \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ qui sont linéaires, complètement positives et qui préservent la trace. Ces applications sont dites CPTP pour "Completely Positive and Trace Preserving". Une telle application est l'archétype de la transformation que peut subir un état quantique.

Dans l'exemple qui suit, nous donnons une application positive qui n'est pas complètement positive.

Contre-exemple 1.1. Soit $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ muni de la base canonique (e_1, e_2) . L'application

$$T : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

qui à tout opérateur associe sa transposée est clairement 1-positif (c'est-à-dire positif) mais n'est pas 2-positif. En effet,

$$\begin{aligned} A &= |e_1\rangle\langle e_1| \otimes |e_1\rangle\langle e_1| + |e_1\rangle\langle e_2| \otimes |e_1\rangle\langle e_2| + |e_2\rangle\langle e_1| \otimes |e_2\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2| \otimes |e_2\rangle\langle e_2| \\ &= |e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2\rangle\langle e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2| \end{aligned}$$

est un opérateur positif. Cependant, son image par $T^{(2)} = T \otimes I_2$ ci-dessous

$$\begin{aligned} T^{(2)}(A) &= |e_1\rangle\langle e_1| \otimes |e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_1| \otimes |e_1\rangle\langle e_2| + |e_1\rangle\langle e_2| \otimes |e_2\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2| \otimes |e_2\rangle\langle e_2| \\ &= |e_1 \otimes e_1\rangle\langle e_1 \otimes e_1| + |e_2 \otimes e_1\rangle\langle e_1 \otimes e_2| + |e_1 \otimes e_2\rangle\langle e_2 \otimes e_1| + |e_2 \otimes e_2\rangle\langle e_2 \otimes e_2| \end{aligned}$$

n'est pas positif car si on pose $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)$, alors

$$\langle x | T^{(2)}(A) | x \rangle = -1.$$

On énonce maintenant le théorème de Kraus qui lie les canaux quantiques et les applications complètement positives qui préservent la trace. Le théorème de Kraus résulte du théorème de Stinespring ([Sti55]).

Théorème 1.4 (Théorème de Kraus [Kra83]). *Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable et T une application linéaire de $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ dans $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ telle que T^* soit σ -faiblement continue. Alors T est complètement positive et préserve la trace si et seulement si T est de la forme*

$$T(\cdot) = \sum_{i \in I} M_i \cdot M_i^*$$

où M_i sont des opérateurs bornés sur \mathcal{H} qui vérifient

$$\sum_{i \in I} M_i^* M_i = I,$$

au sens de la convergence forte.

Nous avons à présent défini les objets nécessaires pour expliquer le principe de mesures quantiques répétées.

1.4 Mesures quantiques répétées

Dans ce modèle, l'environnement qui interagit avec le système \mathcal{H} est constitué d'une chaîne infinie de systèmes quantiques. On suppose que ces systèmes quantiques sont des copies indépendantes d'un système \mathcal{K} .

Chaque copie interagit avec \mathcal{H} pendant un intervalle de temps. Lorsqu'une copie a terminé son interaction, on effectue une mesure sur cette copie. On la considère ensuite isolée de l'expérience, et la copie suivante vient interagir avec \mathcal{H} et ainsi de suite.

Avant d'étudier le cadre général des mesures quantiques répétées, nous verrons pourquoi la mesure est effectuée sur un système auxiliaire et non sur le système \mathcal{H} directement.

1.4.1 Effet Zénon quantique

Dans cette section, nous montrerons l'intérêt d'un principe d'interactions pour étudier l'évolution d'un système quantique. On va montrer qu'un système quantique soumis à une succession de mesures très rapprochées n'évolue pas dans le temps. Le système est alors figé, on parle dans ce cas d'*effet Zénon quantique*. Nous illustrons ici l'effet Zénon quantique¹ à l'aide d'un exemple simple.

Soit $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ un système quantique dans l'état

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose que l'hamiltonien du système est

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On réalise une expérience qui consiste, durant un laps de temps T , à effectuer n mesures à intervalles réguliers de l'observable

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note P_1 et P_2 les projecteurs spectraux de X ,

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'état du système à l'instant $\frac{T}{n}$ est égal à

$$\rho_{\frac{T}{n}} = e^{-i\frac{T}{n}H} \rho_0 e^{i\frac{T}{n}H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{iT}{2n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{T^2}{4n^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La mesure à l'instant $\frac{T}{n}$ renvoie donc 1 avec probabilité

$$\text{Tr}\left(P_1 \rho_{\frac{T}{n}} P_1\right) = 1 - \frac{T^2}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et dans ce cas là, l'état du système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où la mesure renvoie effectivement 1, le système est alors dans l'état d'origine.

Le même raisonnement nous permet d'obtenir la probabilité que les n mesures aux instants $\frac{T}{n}, \frac{2T}{n}, \dots, \frac{(n-1)T}{n}$ et T renvoient toutes 1. Cette probabilité est égale à

$$\left(1 - \frac{T^2}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n = e^{-\frac{T^2}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Quand le nombre de mesures tend vers l'infini, la probabilité que toutes les mesures renvoient 1 tend vers 1. De plus, la probabilité que l'état du système à l'instant T soit égal

1. Voir [Kra81, IHBW90, BS92].

à ρ_0 tend vers 1. Si on effectue un "grand" nombre de mesures, alors l'état du système est figé. C'est ce qu'on appelle l'effet Zénon quantique.

En conséquence, pour pouvoir étudier une dynamique significative, on fait interagir le système \mathcal{H} que l'on veut étudier avec un autre système \mathcal{K} . On effectue ensuite une mesure sur \mathcal{K} afin d'extraire de l'information sur \mathcal{H} . La section suivante sur les trajectoires quantiques s'inspire de cette manipulation.

1.4.2 Trajectoires quantiques discrètes

Cette partie est dédiée à la description du principe de mesures quantiques répétées. Ces mesures successives donnent lieu à des processus que l'on appellera "trajectoires quantiques". Dans la Section 2.4, nous étudions spécifiquement les trajectoires quantiques associées aux marches quantiques ouvertes.

Exposons très succinctement l'expérience effectuée. On couple notre système d'étude \mathcal{H} avec \mathcal{K}_1 une copie d'un système \mathcal{K} . Ces deux systèmes interagissent puis on mesure le système \mathcal{K}_1 , la réduction du paquet d'onde donne un nouvel état de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_1$. Ensuite, on considère le système \mathcal{K}_1 isolé de l'expérience, on récupère uniquement l'état sur \mathcal{H} . Ce nouvel état de \mathcal{H} est alors couplé avec une nouvelle copie de \mathcal{K} , et ainsi de suite.

On étudie maintenant ce procédé plus en détail. On considère une interaction entre un système quantique \mathcal{H} et une chaîne infinie de copies d'un système quantique \mathcal{K} de dimension finie. On note $(f_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ une base orthonormale de \mathcal{K} . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{K}_n \simeq \mathcal{K}$ correspond à la n -ième copie de \mathcal{K} . On pose U l'opérateur unitaire qui décrit l'interaction entre \mathcal{H} et \mathcal{K}_n . On peut écrire U par blocs :

$$U = \sum_{i,j=1}^p U_{ij} \otimes |f_i\rangle\langle f_j|$$

où $U_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour tout $1 \leq i, j \leq p$.

Hypothèses :

On suppose, que chaque système quantique \mathcal{K}_n est dans l'état $|f_1\rangle\langle f_1|$ et que l'observable X de \mathcal{K}_n est diagonale dans la base $(f_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$, donc de la forme

$$X = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$$

où λ_i est une valeur propre de projecteur spectral $P_i = |f_i\rangle\langle f_i|$ pour tout i dans $\{1, \dots, p\}$.

Remarque. Ces hypothèses peuvent être relaxées (voir [BJPP18]), néanmoins ce cas spécifique présente l'avantage d'obtenir des écritures plus simples et de motiver les modèles présentés dans la Section 2.4 sur les marches quantiques ouvertes.

On note ρ l'état initial de \mathcal{H} ,

Interaction :

Le système \mathcal{H} interagit avec le système \mathcal{K}_1 . L'état du système $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_1$ après l'interaction est donc

$$U(\rho \otimes |f_1\rangle\langle f_1|)U^* = \sum_{i=1}^p U_{i1}\rho U_{i1}^* \otimes |f_i\rangle\langle f_i|.$$

Mesure :

On mesure l'observable

$$I \otimes X = \sum_{i=1}^p \lambda_i (I \otimes P_i).$$

La mesure renvoie λ_i avec probabilité

$$\text{Tr}((I \otimes P_i)U(\rho \otimes |f_1\rangle\langle f_1|)U^*) = \text{Tr}(U_{i1}\rho U_{i1}^*).$$

Notons que la somme des probabilités ci-dessus vaut bien 1 grâce à la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^p U_{i1}^* U_{i1} = I.$$

Après l'observation de λ_i , l'état de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_1$ est modifié et devient

$$\tilde{\rho}_1(i) = \frac{(I \otimes P_i)U(\rho \otimes |f_1\rangle\langle f_1|)U^*(I \otimes P_i)}{\text{Tr}((I \otimes P_i)U(\rho \otimes |f_1\rangle\langle f_1|)U^*)} = \frac{U_{i1}\rho U_{i1}^*}{\text{Tr}(U_{i1}\rho U_{i1}^*)} \otimes |f_i\rangle\langle f_i|.$$

Récupération de l'état sur \mathcal{H} :

On récupère l'état $\rho_1(i)$ du système \mathcal{H} par l'intermédiaire de la trace partielle :

$$\rho_1(i) = \text{Tr}_{\mathcal{K}_1}(\tilde{\rho}_1(i)) = \frac{U_{i1}\rho U_{i1}^*}{\text{Tr}(U_{i1}\rho U_{i1}^*)}.$$

On répète ensuite cette manipulation (interaction-mesure-récupération) avec la copie \mathcal{K}_2 et ainsi de suite.

Après chaque interaction, le résultat de la mesure de la copie \mathcal{K}_n entraîne une modification aléatoire de \mathcal{H} . Cet aléa est régi par les mesures de probabilité \mathbb{P}_ρ^n où ρ est l'état initial du système. Plus particulièrement, on définit \mathbb{P}_ρ^n sur $\mathcal{P}(\{1, \dots, p\}^n)$ telle que

$$\mathbb{P}_\rho^n((i_1, \dots, i_n)) = \text{Tr}(U_{i_n 1} \dots U_{i_1 1} \rho U_{i_1 1}^* \dots U_{i_n 1}^*)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, p\}^n$. Notons que la famille des mesures de probabilité $\{\mathbb{P}_\rho^n\}_{n \geq 0}$ est consistante. En effet, grâce à la relation $\sum_{i=1}^p U_{i1}^* U_{i1} = I$, on a $\mathbb{P}_\rho^{n+1}(E) = \mathbb{P}_\rho^n(E)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E \in \mathcal{P}(\{1, \dots, p\}^n)$. Alors le théorème de consistance de Kolmogorov (voir [Øks03] pour une preuve) nous permet d'étendre $\{\mathbb{P}_\rho^n\}_{n \geq 0}$ à une unique mesure de probabilité \mathbb{P}_ρ sur $(\{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}))$.

L'espace probabilisé $(\{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}), \mathbb{P}_\rho)$ représente l'ensemble des résultats de mesures effectuées sur les systèmes auxiliaires. A chaque suite de résultats de mesures, on associe une trajectoire quantique discrète qui est la suite des états successifs de \mathcal{H} . On peut maintenant énoncer la proposition qui définit les trajectoires quantiques.

Proposition 1.2. Soit \mathcal{H} un système quantique d'état initial ρ et \mathcal{K} un système quantique de dimension $p \in \mathbb{N}^*$. La trajectoire quantique discrète $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'ensemble des variables aléatoires définies sur $(\{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}), \mathbb{P}_\rho)$ à valeurs dans les états de \mathcal{H} telles que

$$\rho_n(i_1, \dots, i_n) = \frac{U_{i_n 1} \dots U_{i_1 1} \rho U_{i_1 1}^* \dots U_{i_n 1}^*}{\text{Tr}(U_{i_n 1} \dots U_{i_1 1} \rho U_{i_1 1}^* \dots U_{i_n 1}^*)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, p\}^n$ et $U_{i1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ tels que

$$\sum_{i=1}^p U_{i1}^* U_{i1} = I.$$

La trajectoire quantique $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov telle que

$$\mathbb{P}_\rho \left(\rho_{n+1} = \frac{U_{i1} \theta U_{i1}^*}{\text{Tr}(U_{i1} \theta U_{i1}^*)} \mid \rho_n = \theta \right) = \text{Tr}(U_{i1} \theta U_{i1}^*),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \{1, \dots, p\}$.

Remarque. Si ρ_0 est un état pur alors ρ_n est un état pur pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Après avoir présenté le modèle discret, détaillons le modèle continu.

1.5 Interaction et évolution : cas continu

Nous avons vu dans la Section 1.3 que la transformation la plus générale d'un système quantique ouvert est donnée par une application complètement positive. Dans cette section, on va s'intéresser aux semi-groupes d'applications complètement positives qui représentent les transformations communes que subit un état quantique au cours du temps. Cela permettra de dresser le cadre décrivant l'évolution continue d'un système quantique ouvert \mathcal{H} et de motiver le Chapitre 3 sur les marches quantiques ouvertes à temps continu.

Le théorème suivant décrit entièrement les semi-groupes d'évolution d'un système quantique ouvert.

Théorème 1.5 (Lindblad [GKS76, Lin76, Reb96]). *Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable et $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs sur $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$. On suppose que :*

1. *Pour tout t positif, T_t est complètement positif et T_t est faiblement continu.*
2. *L'opérateur $T_0 = I$ et T_t préserve la trace pour tout t positif.*
3. *L'application $t \mapsto T_t^*$ est fortement continue si l'on munit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de la norme d'opérateurs.*

Il existe alors un opérateur auto-adjoint borné H et une famille d'opérateurs bornés $(L_i)_{i \in I}$ tels que la famille $(T_t)_{t \geq 0}$ admet un générateur \mathcal{L} de la forme

$$\mathcal{L}(X) = -i[H, X] + \sum_{i \in I} L_i X L_i^* - \frac{1}{2} \{L_i^* L_i, X\} \quad (1.2)$$

pour tout $X \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ (la série ci-dessus est fortement convergente). On note les opérateurs $[X, Y] = XY - YX$ et $\{X, Y\} = XY + YX$ pour tout X et Y dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, ces opérateurs sont appelés respectivement commutateur et anti-commutateur.

L'évolution d'un système quantique ouvert, traduite par l'évolution de ses états, est donc donnée par un semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$ qui satisfait $T_t = e^{t\mathcal{L}}$. Ainsi, si l'on note ρ_t l'état du système à l'instant t , alors la famille $(\rho_t)_{t \geq 0}$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d\rho_t}{dt} = \mathcal{L}(\rho_t). \quad (1.3)$$

La formulation de cette équation est due à Gorini, Kossakowski, Sudarshan [GKS76] et Lindblad [Lin76]. On l'appelle *équation maîtresse* ou *équation GKSL*. L'opérateur \mathcal{L} qui agit sur les états s'appelle le *lindbladien* du système.

Remarque. Le lindbladien admet une autre écriture qui nous sera utile par la suite. En effet, cette écriture nous permet d'utiliser le développement de Dyson dans la Section 1.6.1. Si l'on pose

$$L_0 = -iH - \frac{1}{2} \sum_{i \in I} L_i^* L_i$$

(où la série est fortement convergente), alors le lindbladien \mathcal{L} défini via l'équation (1.2) peut s'écrire

$$\mathcal{L}(X) = L_0 X + X L_0^* + \sum_{i \in I} L_i X L_i^* \text{ pour tout } X \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H}). \quad (1.4)$$

On notera $K(\cdot) = L_0 \cdot + \cdot L_0^*$ et $\Phi(\cdot) = \sum_{i \in I} L_i \cdot L_i^*$ de sorte que

$$\mathcal{L}(X) = K(X) + \Phi(X) \text{ pour tout } X \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H}). \quad (1.5)$$

On s'intéresse dorénavant au lien entre les dynamiques discrètes et continues d'un système quantique ouvert. Plus précisément, le modèle continu est justifié car il peut être perçu comme limite du modèle discret ([AP06]). Le prochain théorème stipule que, sous certaines conditions, le générateur discret associé à la dynamique discrète converge vers le lindbladien de la dynamique continue.

Théorème 1.6. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le paramètre temporel de l'interaction, on note*

$$T^{(n)}(\cdot) = \sum_{i \in I \sqcup 0} M_i(n) \cdot M_i(n)^*$$

le canal quantique associé à l'évolution discrète d'un système quantique \mathcal{H} . On suppose que la série $\sum_{i \in I \sqcup 0} M_i(n)^* M_i(n)$ est fortement convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons qu'il existe un opérateur auto-adjoint borné H et une famille d'opérateurs bornés $(L_i)_{i \in I}$ tels que $\sum_{i \in I} L_i^* L_i$ converge fortement et tels que

$$1. M_0(n) = I - \frac{1}{n}(iH + \frac{1}{2} \sum_{i \in I} L_i^* L_i) + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I} \|\sqrt{n} M_i(n) - L_i\|_\infty^2 = 0.$$

Alors, pour tout $X \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| n \left(T^{(n)}(X) - X \right) - \mathcal{L}(X) \right\|_1 = 0$$

où

$$\mathcal{L}(X) = -i[H, X] + \sum_{i \in I} L_i X L_i^* - \frac{1}{2} \{L_i^* L_i, X\}.$$

Après avoir défini la dynamique d'un état soumis à des interactions répétées continues, on s'intéresse à l'évolution de l'état lorsque des mesures sont effectuées de façon continue sur le système auxiliaire. Ces évolutions sont données par les trajectoires quantiques continues qui sont explicitées dans la section suivante.

1.6 Trajectoires quantiques continues

Nous allons à présent considérer un système couplé $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ où le système auxiliaire \mathcal{K} est soumis à une mesure continue. Dans ce cas, l'évolution aléatoire du système \mathcal{H} est décrite par des équations différentielles stochastiques. Ces équations portent le nom d'équations de Schrödinger stochastiques, équations maîtresses stochastiques ou encore équations de Belavkin ([BPZ98]). Les solutions de ces équations sont appelées trajectoires quantiques continues; elles décrivent l'évolution de l'état du système \mathcal{H} .

Les trajectoires quantiques ont été originellement introduites par Davies ([Dav76]). Il a notamment décrit l'évolution d'un atome en présence d'un compteur de photons grâce à des équations différentielles stochastiques obtenues de façon informelle. Plus tard, ces équations seront justifiées grâce à la théorie du filtrage quantique ([Bar06, BL05, BGM04, BVHJ07]). Néanmoins les outils employés dans ces articles sont complexes : algèbre de Von Neumann, espace de Fock, probabilité quantique, etc. C'est pourquoi, plus récemment, une approche plus intuitive mais tout aussi rigoureuse a été exploitée. Cette approche consiste à décrire les modèles continus à partir de limites de modèles concrets basés sur des approximations discrètes ([AP06, BBB13, BBB12, Pel10a, Pel10b]).

Dans cette section, nous allons étudier deux approches différentes pour définir les trajectoires quantiques continues, puis nous verrons que ces trajectoires peuvent être obtenues comme limite de trajectoires quantiques discrètes. Dans la Section 3.5, nous étudierons les trajectoires quantiques associées aux marches quantiques ouvertes.

1.6.1 Mesure sur les trajectoires quantiques

Le but de cette partie est de construire un espace probabilisé permettant de définir les trajectoires quantiques continues.

À présent et jusqu'à la fin de ce chapitre, les systèmes quantiques considérés sont de dimension finie.

Soit \mathcal{H} un système quantique de lindbladien

$$\mathcal{L}(\cdot) = K(\cdot) + \sum_{i \in I} \Phi_i(\cdot)$$

où I est un ensemble fini (car $\dim(\mathcal{H}) < \infty$). Commençons par définir l'ensemble Ξ^t des trajectoires quantiques jusqu'au temps t de la manière suivante

$$\Xi^t = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \Xi_n^t$$

où

$$\Xi_n^t := \{\xi = (i_1, \dots, i_n, t_1, \dots, t_n) \in I^n \times \mathbb{R}^n, 0 < t_1 < \dots < t_n < t\}.$$

On munit l'espace Ξ_n^t de la σ -algèbre Σ_n^t et de la mesure ν_n^t induite par l'application suivante

$$\begin{aligned} J_n : \left(I^n \times [0, t]^n, \mathcal{P}(I^n) \times \mathcal{B}([0, t]^n), \delta^n \times \frac{1}{n!} \lambda_n \right) &\rightarrow (\Xi_n^t, \Sigma_n^t, \nu_n^t) \\ (i_1, \dots, i_n, s_1, \dots, s_n) &\mapsto (i_1, \dots, i_n, s_{\min}, \dots, s_{\max}) \end{aligned}$$

où δ est la mesure de comptage sur I et λ_n est la mesure de Lebesgue sur $[0, t]^n$ équipée de la tribu borélienne $\mathcal{B}([0, t]^n)$. On définit la σ -algèbre $\Sigma^t = \sigma(\Sigma_n^t, n \in \mathbb{N})$. Les mesures δ et λ_n sont σ -finies, on peut donc appliquer le théorème d'extension de Carathéodory² qui nous permet de définir la mesure ν^t sur (Ξ^t, Σ^t) telle que $\nu^t = \nu_n^t$ sur (Ξ_n^t, Σ_n^t) . L'espace Ξ^t des trajectoires quantiques est donc un espace mesuré.

Pour tout état initial $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, on définit la mesure \mathbb{P}_ρ^t sur l'espace Ξ^t des trajectoires quantiques jusqu'au temps t telle que, pour tout $E \in \Sigma^t$,

$$\mathbb{P}_\rho^t(E) = \int_E \text{Tr}(W_{t,\xi}(\rho)) d\nu^t(\xi)$$

2. Voir [Doo12] pour une preuve.

où $\xi = (i_1, \dots, i_n, t_1, \dots, t_n) \in \Xi_n^t$ et

$$W_{t,\xi}(\rho) = e^{(t-t_n)K} \Phi_{i_n} \dots \Phi_{i_1} e^{t_1 K}(\rho).$$

La mesure \mathbb{P}_ρ^t est une mesure de probabilité. En particulier, grâce au développement de Dyson, on obtient :

$$e^{t\mathcal{L}}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in I^n} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} e^{(t-t_n)K} \Phi_{i_n} \dots e^{(t_2-t_1)K} \Phi_{i_1} e^{t_1 K}(\rho) dt_1 \dots dt_n.$$

D'où

$$\mathbb{P}_\rho^t(\Xi^t) = \text{Tr} \left(e^{t\mathcal{L}}(\rho) \right) = 1.$$

On peut aller plus loin et définir une mesure de probabilité \mathbb{P}_ρ sur l'ensemble des trajectoires quantiques. Notons que la famille des mesures de probabilité $\left\{ \mathbb{P}_\rho^t \right\}_{t \geq 0}$ est consistante. En effet, $\mathbb{P}_\rho^{t+s}(E) = \mathbb{P}_\rho^t(E)$ pour tout t, s positifs et $E \in \Sigma^t$. Alors le théorème de consistance de Kolmogorov³ nous permet d'étendre $\left\{ \mathbb{P}_\rho^t \right\}_{t \geq 0}$ à une unique mesure de probabilité \mathbb{P}_ρ sur $(\Xi^\infty, \Sigma^\infty)$. On peut à présent définir les trajectoires quantiques continues.

Définition 1.5. Soit \mathcal{H} un système quantique de dimension finie de Lindbladien

$$\mathcal{L}(\cdot) = K(\cdot) + \sum_{i \in I} \Phi_i(\cdot).$$

Soit $(\Xi^\infty, \Sigma^\infty, \mathbb{P}_\rho)$ l'espace probabilisé défini en amont. On considère $(\rho_t)_{t \geq 0}$ la famille de variable aléatoire :

$$\begin{aligned} (\rho_t)_{t \geq 0} : (\Xi^\infty, \Sigma^\infty, \mathbb{P}_\rho) &\longrightarrow (\mathcal{S}(\mathcal{H}), \mathcal{T}) \\ \xi &\longmapsto \left(\frac{W_{t,\xi \cap [0,t]}(\rho)}{\text{Tr} \left(W_{t,\xi \cap [0,t]}(\rho) \right)} \right)_{t \geq 0} \end{aligned}$$

où ρ est l'état initial du système, \mathcal{T} est la tribu induite de $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ sur $\mathcal{S}(\mathcal{H})$,

$$\xi \cap [0, t) = (i_1, \dots, i_n, t_1, \dots, t_n) \text{ pour } n = \max\{k | t_k < t\}$$

et

$$W_{t,\xi \cap [0,t]}(\rho) = e^{(t-t_n)K} \Phi_{i_n} \dots \Phi_{i_1} e^{t_1 K}(\rho).$$

On dit que la famille de variables aléatoires $(\rho_t)_{t \geq 0}$ est une *trajectoire quantique continue*.

Étudions à présent une autre manière de définir les trajectoires quantiques.

1.6.2 Équation de Schrödinger stochastique avec processus de saut

On expose ici une autre façon de définir les trajectoires quantiques continues. Énonçons tout d'abord un théorème qui garantit l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Schrödinger stochastique avec processus de saut. On dit que cette solution est une *trajectoire quantique continue*.

Théorème 1.7 ([BB91, Pel10a]). *Soient \mathcal{H} un système quantique de dimension finie et \mathcal{L} un opérateur de Lindblad de la forme*

$$\mathcal{L}(\cdot) = L_0 \cdot + \cdot L_0^* + \sum_{i \in I} L_i \cdot L_i^*,$$

3. Voir [Øks03] pour une preuve.

où $L_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour tout $i \in I \sqcup 0$. Soit $(\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité supportant une famille de processus de Poisson indépendants $(N^i)_{i \in I}$ sur \mathbb{R}^2 et ρ un état sur \mathcal{H} . L'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{aligned} \rho_t = & \rho + \int_0^t L_0 \rho_{s-} + \rho_{s-} L_0^* - \rho_{s-} \text{Tr}(L_0 \rho_{s-} + \rho_{s-} L_0^*) \, ds \\ & + \sum_{i \in I} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{L_i \rho_{s-} L_i^*}{\text{Tr}(L_i \rho_{s-} L_i^*)} - \rho_{s-} \right) \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(L_i \rho_{s-} L_i^*)} N^i(dy, ds) \end{aligned} \quad (1.6)$$

admet une unique solution $(\rho_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans les états sur \mathcal{H} .

Remarque. Les deux façons de définir les trajectoires quantiques (Définition 1.5 et Théorème 1.7) engendrent le même processus. Tous les détails ne figurant pas ici, le lecteur peut se référer aux articles [BB91, BGM04] pour une justification rigoureuse du lien entre ces deux approches. Il est toutefois important de noter que l'on peut construire les solutions de l'équation différentielle stochastique (1.6) dans l'espace probabilisé $(\Xi^\infty, \Sigma^\infty, \mathbb{P}_\rho)$. En effet, pour une trajectoire quelconque $\xi = (i_1, \dots, i_n, t_1, \dots, t_n)$ de Ξ^t , considérons le processus de comptage $\tilde{N}^i(t)$ qui dénombre les apparitions de i dans ξ . Soit $(\rho_t)_{t \geq 0}$ la trajectoire quantique de la Définition 1.5. Il a été prouvé dans [BB91] que

$$(\tilde{N}^i(t)) \quad \text{et} \quad \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(L_i \rho_{s-} L_i^*)} N^i(dy, ds) \right)$$

ont la même loi. De plus, on peut montrer que le processus $(\rho_t)_t$ de la Définition 1.5 satisfait

$$\begin{aligned} d\rho_t = & (L_0 \rho_{t-} + \rho_{t-} L_0^* - \rho_{t-} \text{Tr}(L_0 \rho_{t-} + \rho_{t-} L_0^*)) \, dt \\ & + \sum_{i \in I} \left(\frac{L_i \rho_{t-} L_i^*}{\text{Tr}(L_i \rho_{t-} L_i^*)} - \rho_{t-} \right) d\tilde{N}^i(t). \end{aligned}$$

Pour ces raisons, une unique notation désigne les trajectoires quantiques de cette section et de la section précédente. Toutefois, les trajectoires quantiques continues ont été originellement obtenues comme limites de trajectoires quantiques discrètes.

1.7 Trajectoires quantiques : du discret au continu

Dans cette partie, nous allons justifier l'introduction des trajectoires quantiques continues étudiées dans la Section 1.6.2. Il s'avère en effet que les trajectoires quantiques du modèle discret convergent en loi vers l'unique solution de l'équation de Schrödinger stochastique avec processus de saut. Pour montrer cela, nous utiliserons à nouveau les conditions asymptotiques vues dans le Théorème 1.6.

Rappelons la définition des trajectoires quantiques discrètes (Section 1.4.2) : $(\tilde{\rho}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans les états d'un système quantique \mathcal{H} de dimension finie, telle que

$$\mathbb{P}_\rho \left(\tilde{\rho}_{k+1} = \frac{U_{i1}(n) \theta U_{i1}^*(n)}{\text{Tr}(U_{i1}(n) \theta U_{i1}^*(n))} \mid \tilde{\rho}_k = \theta \right) = \text{Tr}(U_{i1}(n) \theta U_{i1}^*(n)), \quad (1.7)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, p\}$ et $U_{i1}(n) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\sum_{i=1}^p U_{i1}^*(n) U_{i1}(n) = I.$$

Conditions asymptotiques :

On suppose qu'il existe un opérateur auto-adjoint borné H et une famille d'opérateurs bornés $(L_i)_{i \in \{2, \dots, p\}}$ tels que

$$U_{11}(n) = I - \frac{1}{n} \left(iH + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^p L_i^* L_i \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.8)$$

$$\text{et } U_{i1}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} L_i + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ pour tout } i \in \{2, \dots, p\}. \quad (1.9)$$

Nous avons maintenant introduit toutes les notations nécessaires pour énoncer le théorème qui fait le lien entre les versions discrète et continue des trajectoires quantiques.

Théorème 1.8 (Théorème 14 de [Pel10a]). *Soit $(\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité supportant une famille de processus de Poisson indépendants $(N^i)_{i \in \{2, \dots, p\}}$ sur \mathbb{R}^2 . Soient $T > 0$, n un entier naturel et $(\tilde{\rho}_{[nt]})_{0 \leq t \leq T}$ la trajectoire quantique discrète définie grâce à l'équation (1.7). Soit $(\rho_t)_{0 \leq t \leq T}$ la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$\begin{aligned} \rho_t = & \rho_0 + \int_0^t L_0 \rho_{s-} + \rho_{s-} L_0^* - \rho_{s-} \text{Tr}(L_0 \rho_{s-} + \rho_{s-} L_0^*) \, ds \\ & + \sum_{i=2}^p \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{L_i \rho_{s-} L_i^*}{\text{Tr}(L_i \rho_{s-} L_i^*)} - \rho_{s-} \right) \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(L_i \rho_{s-} L_i^*)} N^i(dy, ds) \end{aligned} \quad (1.10)$$

où

$$L_0 = - \left(iH + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^p L_i^* L_i \right).$$

Supposons les asymptotiques (1.8) et (1.9), alors la trajectoire quantique discrète $(\tilde{\rho}_{[nt]})_{0 \leq t \leq T}$ converge en loi vers la trajectoire quantique continue $(\rho_t)_{0 \leq t \leq T}$.

Remarque. Dans la Section 1.4.2, nous avons uniquement considéré des trajectoires quantiques discrètes associées à une observable diagonale. Pour une observable quelconque, les processus construits comme limites de trajectoires quantiques discrètes sont solutions d'équations différentielles stochastiques diffusives avec sauts. Nous ne détaillerons pas le cadre diffusif des équations de Schrödinger stochastiques ([Pel08]) car il n'y a pas de terme de diffusion pour les marches quantiques ouvertes.

Ceci conclut le premier chapitre dont le but est de motiver les modèles stochastiques présentés dans la suite. Nous pouvons à présent étudier les marches quantiques ouvertes.

Chapitre 2

Marches quantiques ouvertes à temps discret

Sommaire

2.1	Définition du modèle	25
2.2	Lien avec les chaînes de Markov classiques	28
2.3	Exemple	29
2.4	Trajectoires quantiques	30
2.5	Propriétés	34
2.6	Théorèmes asymptotiques pour les marches quantiques ouvertes homogènes sur \mathbb{Z}^d	39

S. Attal, F. Petruccione, C. Sabot et I. Sinayskiy ont introduit un nouveau modèle de marches quantiques sur un graphe ([APSS12]). Ces marches quantiques prennent en compte le comportement des systèmes quantiques ouverts, c'est pourquoi elles sont nommées *marches quantiques ouvertes*. Elles sont les analogues quantiques des chaînes de Markov classiques. Ces marches ont donné lieu à diverses études théoriques dans lesquelles un théorème central limite et un principe de grandes déviations ont été prouvés ([AGPS15, CP15]). Les marches quantiques ouvertes étant des généralisations de marches aléatoires classiques, Y. Pautrat et R. Carbone ont introduit des notions telles que l'irréductibilité et la période ([CP16b]). Toujours dans l'optique d'étudier les marches quantiques ouvertes en analogie avec les chaînes de Markov, Y. Pautrat, I. Bardet et D. Bernard [BBP17] se sont intéressés à la probabilité de visiter un site donné en temps fini, mais aussi au nombre moyen de visites d'un site. Les résultats sur les marches quantiques ouvertes sont souvent semblables aux résultats sur les chaînes de Markov classiques. Toutefois, les effets quantiques engendrent parfois un comportement inhabituel. Le Chapitre 3 concernant le modèle continu s'inspire de la méthodologie et des résultats présentés ci-dessous.

2.1 Définition du modèle

On se donne V un graphe avec un ensemble fini ou dénombrable de sommets et on considère toutes les arêtes orientées $\{(i, j), i, j \in V\}$. Le but est de construire un analogue quantique d'une marche aléatoire sur V . Pour tout site i dans V , on se donne \mathcal{H}_i un espace de Hilbert séparable. Il représente l'espace des degrés internes de liberté associé au point i . On note $\mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$ l'ensemble des états sur \mathcal{H}_i :

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}_i) = \{\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i) \mid \rho^* = \rho, \rho \geq 0, \text{Tr}(\rho) = 1\}.$$

Pour tout i, j dans V , posons $A_i^j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$, tels que pour tout i dans V :

$$\sum_{j \in V} A_i^{j*} A_i^j = I_{\mathcal{H}_i}, \quad (2.1)$$

où la série ci-dessus converge fortement.

Comme nous allons le voir, l'opérateur A_i^j représente l'effet issu du passage de i à j . La contrainte ci-dessus doit être interprétée comme "l'ensemble des effets partant du site i est égal à $I_{\mathcal{H}_i}$ ". On retrouve la même idée que pour les matrices de transitions associées aux chaînes de Markov : "la somme des probabilités de partir d'un site i est 1".

On pose $\mathcal{K} = \bigoplus_{i \in V} \mathcal{H}_i \otimes |i\rangle$ et on note \mathcal{D} l'ensemble des états diagonaux sur \mathcal{K} qui est un sous ensemble de $\mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ où $\mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ est l'ensemble des opérateurs à trace sur \mathcal{K} :

$$\mathcal{D} = \left\{ \mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K}), \mu = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i|, \rho(i) \geq 0, \sum_{i \in V} \text{tr}(\rho(i)) = 1 \right\}.$$

On définit aussi \mathcal{M} l'application linéaire complètement positive sur $\mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) \\ \mu &\mapsto \sum_{i, j \in V} B_i^j \mu B_i^{j*} \end{aligned}$$

où

$$B_i^j = A_i^j \otimes |j\rangle\langle i|.$$

L'opérateur B_i^j transcrit l'idée que l'on peut passer de i à j , et dans ce cas là, la transformation sur l'espace d'état interne est régie par A_i^j . En effet, si

$$\mu = \rho \otimes |i\rangle\langle i|,$$

alors

$$B_i^j \mu B_i^{j*} = A_i^j \rho A_i^{j*} \otimes |j\rangle\langle j|.$$

L'application \mathcal{M} est une application complètement positive (voir Définition 1.4) qui préserve la trace. En effet, soit $\mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{M}(\mu)) &= \text{Tr} \left(\sum_{i, j \in V} B_i^{j*} B_i^j \mu \right) \\ &= \text{Tr} \left(\sum_{i \in V} \left(\left(\sum_{j \in V} A_i^{j*} A_i^j \right) \otimes |i\rangle\langle i| \right) \mu \right) \\ &= \text{Tr}(\mu). \end{aligned}$$

En particulier, \mathcal{M} préserve \mathcal{D} . Nous avons désormais les objets nécessaires pour définir les marches quantiques ouvertes.

Construisons à présent le modèle de probabilité associé aux marches quantiques ouvertes. Celui-ci est relié à la mesure de la position sur le graphe. Supposons que l'état du système \mathcal{K} soit sous la forme diagonale¹ suivante :

$$\mu = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i|.$$

1. On s'intéresse uniquement aux états diagonaux car l'application \mathcal{M} projette un état quelconque sur \mathcal{D} .

Une mesure de la "position" sur V donne la valeur i avec probabilité

$$q_0(i) = \text{Tr}(\rho(i)) .$$

Après avoir appliqué \mathcal{M} , l'état du système devient

$$\mathcal{M}(\mu) = \sum_{i \in V} \left(\sum_{j \in V} A_j^i \rho(j) A_j^{i*} \right) \otimes |i\rangle\langle i| .$$

Une mesure de la "position" sur V donne alors la valeur i avec probabilité

$$q_1(i) = \text{Tr} \left(\sum_{j \in V} A_j^i \rho(j) A_j^{i*} \right) .$$

En mesurant la position pour l'itéré $\mathcal{M}^n(\mu)$, on construit une suite de distributions $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur V . Ces remarques nous amènent au résultat suivant.

Proposition 2.1 ([APSS12]). Soient $\mu^{(0)}$ un état de \mathcal{K} et \mathcal{M} une application linéaire complètement positive sur $\mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) \\ \mu &\mapsto \sum_{i,j \in V} B_i^j \mu B_i^{j*} \end{aligned} \quad (2.2)$$

où

$$B_i^j = A_i^j \otimes |j\rangle\langle i| \text{ avec } A_i^j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) .$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les états

$$\mu^{(n)} = \mathcal{M}^n(\mu^{(0)})$$

sont de la forme

$$\mu^{(n)} = \sum_{i \in V} \rho^{(n)}(i) \otimes |i\rangle\langle i| \in \mathcal{D} .$$

De plus,

$$\rho^{(n+1)}(i) = \sum_{j \in V} A_j^i \rho^{(n)}(j) A_j^{i*} .$$

La proposition ci-dessus nous permet de définir les marches quantiques ouvertes.

Définition 2.1. La suite d'états $(\mu^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée *marche quantique ouverte* associée au canal quantique \mathcal{M} . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in V$, les quantités

$$q_n(i) = \text{Tr}(\rho^{(n)}(i))$$

définissent une mesure de probabilité q_n sur V . Celle-ci est appelée la distribution de la marche quantique ouverte à l'instant n .

Dans la suite, nous confondrons une marche quantique ouverte et son canal quantique. On notera donc, par abus, \mathcal{M} une marche quantique ouverte.

Remarque. Contrairement à l'article original sur le théorème central limite pour les marches quantiques ouvertes [AGPS15], on autorise le marcheur à "sauter sur place", c'est-à-dire que l'opérateur B_i^i peut être non nul. Dans ce cas, le théorème central limite (voir Section 2.5) est très légèrement modifié. On considère que le marcheur peut stagner afin d'obtenir des limites de marches quantiques discrètes non triviales (voir Section 3.6).

Remarque. La suite de distribution $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas markovienne, la donnée de q_1 n'est pas suffisante pour déterminer q_2 par exemple. En effet, pour

$$\mu = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i|,$$

on a

$$\mathcal{M}^2(\mu) = \sum_{i \in V} \left(\sum_{j,k \in V} A_j^i A_k^j \rho(k) A_k^{j*} A_j^{i*} \right) \otimes |i\rangle\langle i|,$$

et donc, pour tout i dans V ,

$$q_2(i) = \text{Tr} \left(\sum_{j,k \in V} A_j^i A_k^j \rho(k) A_k^{j*} A_j^{i*} \right).$$

La quantité ci-dessus ne peut être obtenue à partir de

$$q_1 = \left(\sum_{j \in V} \text{Tr} \left(A_j^i \rho(j) A_j^{i*} \right) \right)_{i \in V},$$

la connaissance de μ est requise. Contrairement aux chaînes de Markov classiques, les distributions $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peuvent pas se déterminer de proche en proche.

Néanmoins, il s'avère que, sous certaines conditions, les marches quantiques ouvertes sont exactement des marches aléatoires classiques. Ce cas particulier est détaillé dans la section suivante.

2.2 Lien avec les chaînes de Markov classiques

Dans cette partie, nous allons remarquer que les marches quantiques ouvertes sont des extensions de chaînes de Markov classiques. Rappelons qu'une chaîne de Markov $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur V est définie par sa distribution initiale $p_0 = (p_0(i))_{i \in V}$ et par sa matrice de transition $P = (p_{ij})_{i,j \in V}$ où

$$p_{ij} = \mathbb{P}(Y_1 = j | Y_0 = i).$$

Proposition 2.2 ([APSS12]). Soient $(U_i^j)_{i,j \in V} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)^{V^2}$ une famille d'opérateurs unitaires et $P = (p_{ij})_{i,j \in V}$ une matrice de transition. On pose, pour tout i et j dans V ,

$$A_i^j = \sqrt{p_{ij}} U_i^j.$$

L'égalité $\sum_{j \in V} A_i^{j*} A_i^j = I$ est alors vérifiée pour tout i dans V . De plus, pour tout état initial

$$\mu^{(0)} = \sum_{i \in V} \rho^{(0)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|,$$

les distributions $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la marche quantique ouverte sont celles d'une chaîne de Markov classique sur V , de matrice de transition $P = (p_{ij})_{i,j \in V}$ et de distribution initiale p_0 telle que

$$p_0(i) = \text{Tr}(\rho^{(0)}(i)),$$

pour tout i dans V .

Démonstration. Tout d'abord, pour tout i dans V , on a bien

$$\sum_{j \in V} A_i^{j*} A_j^i = \sum_{j \in V} p_{ij} U_i^{j*} U_j^i = I.$$

Par définition, $q_0 = p_0$. Calculons maintenant, pour i dans V ,

$$q_1(i) = \sum_{j \in V} \text{Tr} \left(A_j^i \rho^{(0)}(j) A_j^{i*} \right) = \sum_{j \in V} p_{ji} \text{Tr} \left(U_j^{i*} U_j^i \rho^{(0)}(j) \right) = \sum_{j \in V} p_{ji} p_0(j).$$

C'est-à-dire que $q_1(i)$ est la probabilité d'être sur le site i à l'étape 1 pour une chaîne de Markov classique sur V de matrice de transition $P = (p_{ij})_{i,j \in V}$ et de distribution initiale p_0 . De même, pour i dans V ,

$$\begin{aligned} q_2(i) &= \text{Tr} \left(\sum_{j,k \in V} A_j^i A_k^j \rho(k) A_k^{j*} A_j^{i*} \right) \\ &= \sum_{j,k \in V} p_{ji} p_{kj} \text{Tr} \left(U_k^{j*} U_j^{i*} U_j^i U_k^j \rho^{(0)}(k) \right) \\ &= \sum_{j,k \in V} p_{ji} p_{kj} p_0(k) \end{aligned}$$

est la probabilité d'être sur le site i à l'étape 2 pour une chaîne de Markov classique sur V de matrice de transition $P = (p_{ij})_{i,j \in V}$ et de distribution initiale p_0 . L'itération de ce procédé clôt la démonstration. \square

Les chaînes de Markov classiques sont donc des cas particuliers de marches quantiques ouvertes. Cela justifie l'étude des propriétés communément associées aux chaînes de Markov (voir Section 2.5). Avant de passer à cette partie, illustrons notre propos par un exemple.

2.3 Exemple

Dans cette partie, nous illustrons les notions vues en amont. On se concentre sur les marches sur $V = \mathbb{Z}$ telles que $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_j$ pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$.

L'exemple le plus basique de marche quantique ouverte est la marche aléatoire sur \mathbb{Z} où le marcheur peut stagner, sauter à droite ou sauter à gauche, ces transformations sont régies par A_0 , A_1 ou A_{-1} respectivement. On pose

$$\begin{aligned} B_i^j &= A_0 \otimes |i\rangle\langle i| && \text{si } j = i \\ &= A_1 \otimes |i+1\rangle\langle i| && \text{si } j = i+1 \\ &= A_{-1} \otimes |i-1\rangle\langle i| && \text{si } j = i-1 \\ &= 0 && \text{sinon,} \end{aligned}$$

tels que

$$A_0^* A_0 + A_1^* A_1 + A_{-1}^* A_{-1} = I.$$

Partant de l'état $\mu^{(0)} = \rho \otimes |0\rangle\langle 0|$, à l'étape suivante on obtient :

$$\mu^{(1)} = A_{-1} \rho A_{-1}^* \otimes |-1\rangle\langle -1| + A_0 \rho A_0^* \otimes |0\rangle\langle 0| + A_1 \rho A_1^* \otimes |1\rangle\langle 1|.$$

La distribution de probabilité de la marche quantique ouverte a son support dans $\{-1, 0, 1\}$ et pour $i \in \{-1, 0, 1\}$, $q_1(i) = \text{Tr}(A_i \rho A_i^*)$.

A l'étape 2, l'état devient :

$$\begin{aligned} \mu^{(2)} = & A_{-1}^2 \rho A_{-1}^{2*} \otimes |-2\rangle\langle -2| \\ & + (A_{-1} A_0 \rho A_0^* A_{-1}^* + A_0 A_{-1} \rho A_{-1}^* A_0^*) \otimes |-1\rangle\langle -1| \\ & + (A_{-1} A_1 \rho A_1^* A_{-1}^* + A_1 A_{-1} \rho A_{-1}^* A_1^* + A_0^2 \rho A_0^{2*}) \otimes |0\rangle\langle 0| \\ & + (A_1 A_0 \rho A_0^* A_1^* + A_0 A_1 \rho A_1^* A_0^*) \otimes |1\rangle\langle 1| \\ & + A_1^2 \rho A_1^{2*} \otimes |2\rangle\langle 2|. \end{aligned}$$

Le support de q_2 est donc $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. On peut itérer la procédure ci-dessus et générer notre marche quantique ouverte sur \mathbb{Z} .

Exemple 2.1. Prenons un exemple concret, où $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}^2$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} I, \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

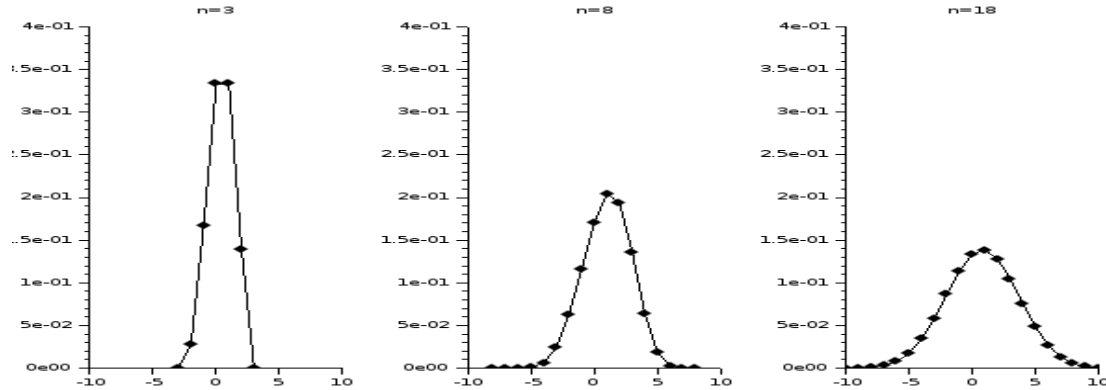
On a bien

$$A_0^* A_0 + A_1^* A_1 + A_{-1}^* A_{-1} = I.$$

En partant de l'état $\mu^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes |0\rangle\langle 0|$, on obtient les distributions suivantes pour les 4 premières étapes :

	$ -4\rangle$	$ -3\rangle$	$ -2\rangle$	$ -1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 2\rangle$	$ 3\rangle$	$ 4\rangle$
q_0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
q_1	0	0	0	0.1667	0.5	0.3333	0	0	0
q_2	0	0	0.0278	0.1667	0.3333	0.3333	0.1389	0	0
q_3	0	0.0046	0.0417	0.1481	0.25	0.3009	0.2083	0.0463	0
q_4	0.0008	0.0093	0.0494	0.1296	0.2083	0.2685	0.2284	0.0926	0.0131

Les figures ci-dessous montrent les distributions obtenues aux étapes 3, 8 et 18.



Sur ces simulations numériques, la distribution de la marche quantique ouverte semble devenir gaussienne. Les propriétés asymptotiques seront étudiées plus en détail dans la Section 2.6. Pour d'autres exemples, sur \mathbb{Z}^2 notamment, le lecteur pourra consulter [AGPS15] et [CP15].

2.4 Trajectoires quantiques

Les trajectoires quantiques permettent de simuler les marches quantiques ouvertes. En effet, une trajectoire quantique est une réalisation d'une marche quantique ouverte. Elle

peut être assimilée à un couple $(\rho_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où X_n est la position de la particule et ρ_n est l'état quantique interne. Le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'analogie d'une trajectoire d'une chaîne de Markov, c'est pourquoi on réalise une étude approfondie de ce processus par la suite (voir Section 2.5.2 par exemple).

Le principe des trajectoires quantiques associées à une marche quantique ouverte est le suivant : à partir de n'importe quel état initial μ sur \mathcal{K} , on applique \mathcal{M} et on effectue une mesure sur V de ce nouvel état. La réduction du paquet d'onde donne lieu à un état aléatoire sur \mathcal{K} . À partir de cet état aléatoire, on répète la procédure et ainsi de suite.

Plus particulièrement, si $\mu = \rho \otimes |i\rangle\langle i|$ alors

$$\mathcal{M}(\mu) = \sum_{j \in V} A_i^j \rho A_i^{j*} \otimes |j\rangle\langle j|.$$

Considérons que $\mathcal{M}(\mu)$ est l'état du système, alors la mesure de la position de la particule renvoie j avec probabilité $\text{Tr}(A_i^j \rho A_i^{j*})$, et dans ce cas, l'état du système devient

$$\frac{A_i^j \rho A_i^{j*}}{\text{Tr}(A_i^j \rho A_i^{j*})} \otimes |j\rangle\langle j| \text{ avec probabilité } \text{Tr}(A_i^j \rho A_i^{j*}).$$

On répète la manipulation en considérant $\mathcal{M}\left(\frac{A_i^j \rho A_i^{j*}}{\text{Tr}(A_i^j \rho A_i^{j*})} \otimes |j\rangle\langle j|\right)$, etc.

Plus précisément, construisons la mesure de probabilité sur $\Omega = V^{\mathbb{N}}$ permettant de définir les trajectoires quantiques. Pour tout état $\mu = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i| \in \mathcal{D}$, on définit la mesure de probabilité \mathbb{P}_μ à l'aide de ses restrictions sur V^{n+1} :

$$\mathbb{P}_\mu(i_0, \dots, i_n) = \text{Tr}(A_{i_{n-1}}^{i_n} \dots A_{i_0}^{i_1} \rho(i_0) A_{i_0}^{i_1*} \dots A_{i_{n-1}}^{i_n*}),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(i_0, \dots, i_n) \in V^{n+1}$.

L'équation (2.1) fournit la consistance de ces restrictions, et donc le théorème d'extension de Kolmogorov assure que \mathbb{P}_μ est bien définie et ce de façon unique.

Par abus, on notera \mathbb{P} cette mesure (sans mentionner l'état initial du système) et on notera \mathbb{E} l'espérance associée. Par contre, si on s'intéresse à un état initial spécifique de la forme $\rho \otimes |i\rangle\langle i|$, c'est-à-dire lorsque la particule est initialement sur le site i munie du paramètre interne ρ , la probabilité correspondante \mathbb{P}_μ sera notée $\mathbb{P}_{i,\rho}$. L'espérance associée à $\mathbb{P}_{i,\rho}$ sera quant à elle naturellement notée $\mathbb{E}_{i,\rho}$.

Nous pouvons à présent énoncer la proposition qui définit les trajectoires quantiques.

Proposition 2.3 ([APSS12]). Soit $\mu^{(0)} = \sum_{i \in V} \rho^{(0)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|$ l'état initial du système \mathcal{K} .

La mesure de la position sur V via la réduction du paquet d'onde transforme l'état en $\omega_0 = \frac{\rho^{(0)}(i)}{\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))} \otimes |i\rangle\langle i|$ avec probabilité $\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))$.

Soit \mathcal{M} le canal quantique défini par l'équation (2.2). On itère la procédure : transformation d'un état via l'application \mathcal{M} puis mesure de la position sur V . Celle-ci engendre une chaîne de Markov $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans les états de \mathcal{K} . Si l'état de la chaîne à l'instant n est $\omega_n = \rho \otimes |i\rangle\langle i|$, alors l'état de la chaîne à l'instant $n+1$ est

$$\omega_{n+1} = \frac{A_i^j \rho A_i^{j*}}{\text{Tr}(A_i^j \rho A_i^{j*})} \otimes |j\rangle\langle j| \text{ avec probabilité } \text{Tr}(A_i^j \rho A_i^{j*}).$$

En résumé, cela signifie que le processus $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait $(\omega_n = \rho_n \otimes |X_n\rangle\langle X_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ où $(\rho_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de distribution initiale :

$$\mathbb{P} \left((\rho_0, X_0) = \left(\frac{\rho^{(0)}(i)}{\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))}, i \right) \right) = \text{Tr}(\rho^{(0)}(i))$$

telle que si $(\rho_n, X_n) = (\rho, i)$ alors

$$(\rho_{n+1}, X_{n+1}) = \left(\frac{A_i^j \rho A_i^{j*}}{\text{Tr}(A_i^j \rho A_i^{j*})}, j \right) \text{ avec probabilité } \text{Tr}(A_i^j \rho A_i^{j*}).$$

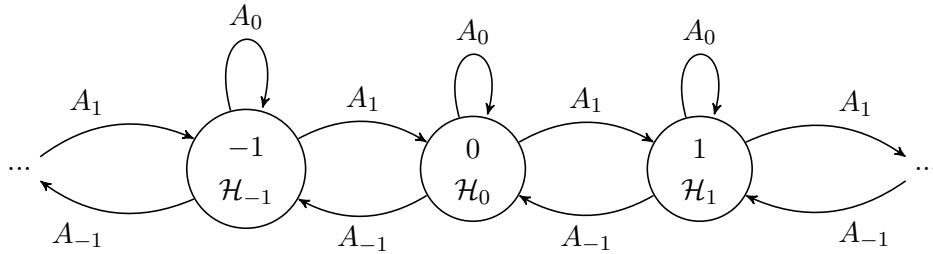
De cette proposition découle la définition des trajectoires quantiques.

Définition 2.2. La chaîne de Markov $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée trajectoire quantique associée à la marche quantique ouverte \mathcal{M} . Elle est la donnée de deux processus $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui représentent respectivement l'évolution du paramètre interne et la trajectoire de la position de la particule.

Remarque. Le processus $(\rho_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov mais les processus $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas markoviens. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, la connaissance de X_n n'est pas suffisante pour déterminer la distribution de X_{n+1} . La donnée du couple (ρ_n, X_n) est requise pour obtenir la distribution de X_{n+1} . De même, pour tout entier naturel n , la distribution de ρ_{n+1} est déterminée par ρ_n et X_n .

Illustrons notre propos à l'aide d'un exemple simple.

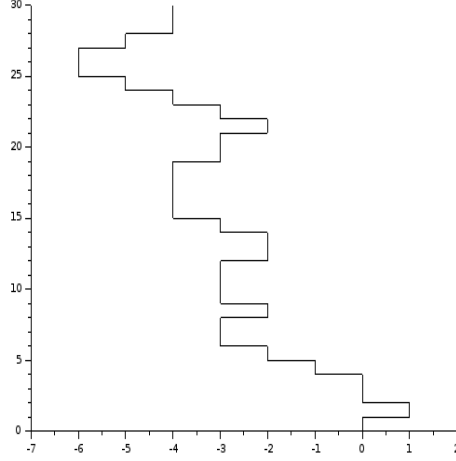
Exemple 2.2. Considérons à nouveau l'Exemple 2.1. En analogie avec les chaînes de Markov classiques, on dresse ci-dessous le graphe associé à la marche quantique ouverte.



On a $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}^2$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et :

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}I, \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La figure ci-dessous représente une simulation numérique d'une trajectoire quantique où l'axe des ordonnées représente la n -ième étape et l'axe des abscisses renvoie la position du marcheur X_n .



Le résultat qui suit nous permet de faire le lien entre marches quantiques ouvertes et les trajectoires quantiques associées.

Proposition 2.4. Soient $(\mu^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ la marche quantique ouverte définie dans la Proposition 2.1 et $(\omega_n = \rho_n \otimes |X_n\rangle\langle X_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ la trajectoire quantique associée définie dans la Proposition 2.3. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(\omega_n) = \mu^{(n)}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distribution de X_n est égale à q_n . C'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X_n = i) = q_n(i),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \in V$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\omega_n) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\omega_n | \omega_{n-1})) = \mathbb{E}(\mathcal{M}(\omega_{n-1})) = \mathcal{M}(\mathbb{E}(\omega_{n-1})) \\ &= \mathcal{M}^n(\mathbb{E}(\omega_0)) \\ &= \mathcal{M}^n(\mu^{(0)}) \\ &= \mu^{(n)}. \end{aligned}$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in V$,

$$q_n(i) = \text{Tr}(\mu^{(n)}(I \otimes |i\rangle\langle i|)) = \mathbb{E}(\text{Tr}(\omega_n(I \otimes |i\rangle\langle i|))) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_n=i}) = \mathbb{P}(X_n = i).$$

□

Revenons brièvement sur le cadre spécifique de la Section 2.2 où les marches quantiques ouvertes sont des marches aléatoires classiques. Les trajectoires quantiques vérifiant les hypothèses de la Proposition 2.2 ont des comportements classiques. En effet, on remarque que le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov classique sur V . Plus précisément, s'il existe $(U_i^j)_{i,j \in V} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)^{V^2}$ une famille d'opérateurs unitaires et $P = (p_{ij})_{i,j \in V}$ une matrice de transition de sorte que, pour tout i et j dans V ,

$$A_i^j = \sqrt{p_{ij}} U_i^j,$$

alors le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini dans la Proposition 2.3 vérifie

$$\mathbb{P}(X_0 = i) = \text{Tr}(\rho^{(0)}(i)) \text{ et } \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij},$$

pour tout $i, j \in V$ et $n \in \mathbb{N}$.

On peut à présent étudier les propriétés associées au processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui représente la position du marcheur.

2.5 Propriétés

L'irréductibilité, les temps de retour, le nombre de visites, etc... sont des notions spécifiques aux chaînes de Markov. Une marche quantique étant une généralisation d'une chaîne de Markov, il est alors intéressant de mettre ces notions en perspectives dans le cadre des marches quantiques ouvertes. Les articles [BBP17, CP16b] ont apporté des contributions majeures sur ces sujets.

2.5.1 Irréductibilité

En général, on s'intéresse aux chaînes de Markov $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dites irréductibles c'est-à-dire les chaînes où tous les points du graphe communiquent. Cela signifie que pour tout i et j dans V , il existe un entier n tel que $\mathbb{P}(Y_n = j | Y_0 = i) > 0$. On s'intéresse également aux chaînes de Markov pour lesquelles il est possible d'accéder à tous les sites en n étapes maximum. On parle alors de n -régularité pour la chaîne. Nous essayons d'étendre ces propriétés aux marches quantiques ouvertes. On définit ci-dessous les notions originelles d'irréductibilité (introduite par Davies [Dav69]), d'ergodicité et de n -régularité.

Définition 2.3. Soit \mathcal{M} une marche quantique ouverte, on dit que \mathcal{M} :

- ▶ est irréductible si \mathcal{M} n'admet aucune projection sous-harmonique non triviale. Rappelons qu'une projection $P \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ est dite sous-harmonique pour \mathcal{M} si

$$\mathcal{M}(P\mathcal{I}_1(\mathcal{K})P) \subset P\mathcal{I}_1(\mathcal{K})P;$$

- ▶ est ergodique si pour tout $\mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$, il existe t tel que $e^{t\mathcal{M}}(\mu) > 0$;
- ▶ améliore la positivité si pour tout $\mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$, $\mathcal{M}(\mu) > 0$;
- ▶ est n -régulière si \mathcal{M}^n améliore la positivité.

Remarque. L'ergodicité admet la formulation équivalente suivante : pour tout $\mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ et pour tout $t > 0$, $e^{t\mathcal{M}}(\mu) > 0$. Le fait que le support de $e^{t\mathcal{M}}(\mu)$ ne dépende pas de t constitue le point clé de la démonstration. De plus, il s'avère que l'irréductibilité et l'ergodicité sont des notions équivalentes (voir [CP16b]).

Dans le but d'obtenir des définitions en termes de trajectoires (comme dans le cadre classique), on décrit les notions vues dans la Définition 2.3 à l'aide des opérateurs de Kraus.

Proposition 2.5 ([CP16b]). Soit \mathcal{M} la marche quantique ouverte définie par l'équation (2.2). \mathcal{M} :

- ▶ améliore la positivité si et seulement si pour tout x non nul dans \mathcal{K} , l'espace vectoriel engendré par $\{B_i^j x, i, j \in V\}$ est dense dans \mathcal{K} ;
- ▶ est n -régulier si et seulement si pour tout x non nul dans \mathcal{K} , l'espace vectoriel engendré par $\{B_{i_n}^{j_n} \dots B_{i_1}^{j_1} x, i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n \in V\}$ est dense dans \mathcal{K} ;
- ▶ est irréductible si et seulement si pour tout x non nul dans \mathcal{K} , l'ensemble $\mathbb{C}[B_i^j]x$ est dense dans \mathcal{K} , où $\mathbb{C}[B_i^j]$ est l'ensemble des polynômes en $B_i^j, i, j \in V$.

De cette proposition découle une description trajectorielle de l'irréductibilité, de la n -régularité et d'amélioration de la positivité. Nous devons tout d'abord introduire quelques notations : pour i et j dans V , on appelle *chemin de i à j* une suite finie i_0, \dots, i_n d'éléments de V telle que $i_0 = i$ et $i_n = j$. Un tel chemin est dit de longueur n , et on note $\mathcal{P}_n(i, j)$ l'ensemble des chemins de longueur n . On pose $\mathcal{P}(i, j)$ l'ensemble des chemins de longueur quelconque, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}(i, j) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n(i, j).$$

Pour des raisons de simplification d'écriture, on associe à chaque chemin

$$\pi = (i_0, \dots, i_n) \in \mathcal{P}(i, j)$$

l'opérateur

$$A_\pi = A_{i_{n-1}}^j \dots A_i^{i_1}$$

dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$. On peut à présent énoncer le corollaire suivant qui découle directement de la Proposition 2.5.

Corollaire 2.1 ([CP16b]). Soit \mathcal{M} la marche quantique ouverte définie par l'équation (2.2), \mathcal{M} :

- ▶ améliore la positivité si et seulement si pour tout i, j dans V et pour tout x non nul dans \mathcal{H}_i , l'espace vectoriel engendré par $\{A_i^j x\}$ est dense dans \mathcal{H}_j ;
- ▶ est n -régulier si et seulement si pour tout i, j dans V et pour tout x non nul dans \mathcal{H}_i , l'espace vectoriel engendré par $\{A_\pi x, \pi \in \mathcal{P}_n(i, j)\}$ est dense dans \mathcal{H}_j ;
- ▶ est irréductible si et seulement si pour tout i, j dans V et pour tout x non nul dans \mathcal{H}_i , l'espace vectoriel engendré par $\{A_\pi x, \pi \in \mathcal{P}(i, j)\}$ est dense dans \mathcal{H}_j .

Remarque. "Améliorer la positivité" est une notion très restrictive car elle implique que \mathcal{H}_i soit de dimension 1 pour tout i dans V et que A_i^j soit non nul pour tout i, j dans V .

De ce corollaire découle une définition d'irréductibilité en terme de chemins comme dans le cadre des chaînes de Markov classiques.

Définition 2.4. Pour i et j dans V , on dit que j est accessible à partir de i (on note $i \rightarrow j$) si, pour tout x non nul, l'espace vectoriel engendré par $\{A_\pi x, \pi \in \mathcal{P}(i, j)\}$ est dense dans \mathcal{H}_j . On dit que i et j communiquent si $i \rightarrow j$ et $j \rightarrow i$. Le Corollaire 2.1 stipule que \mathcal{M} est irréductible si et seulement si tous les points du graphe V communiquent.

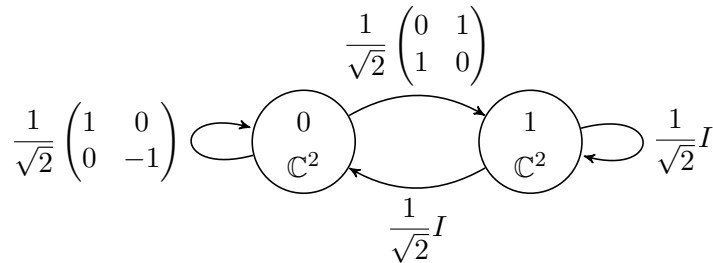
Nous allons illustrer les notions de cette section grâce aux exemples suivants.

Exemple 2.3. Nous exposons ici un exemple de marche quantique ouverte 3-régulière mais pas 2-régulière. Considérons une marche quantique ouverte sur $V = \{0, 1\}$ avec $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^2$, telle que

$$B_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes |0\rangle\langle 0|, \quad B_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes |1\rangle\langle 0|,$$

$$B_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} I \otimes |1\rangle\langle 1|, \quad \text{et } B_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} I \otimes |0\rangle\langle 1|.$$

On donne ci-dessous la représentation graphique de cet exemple.



La marche quantique ouverte associée à $\mathcal{M}(\mu) = \sum_{i,j \in V} B_i^j \mu B_i^{j*}$ est irréductible et plus particulièrement 3-régulière.

Néanmoins, elle n'est pas 2-régulière. En effet, pour $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes |1\rangle$,

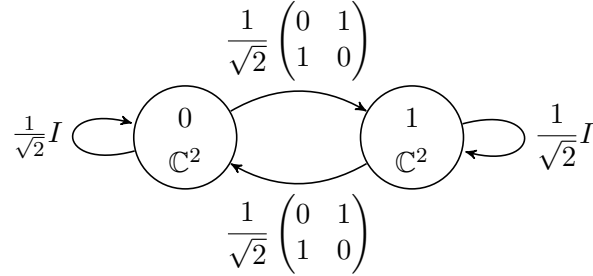
$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes |0\rangle \notin \text{Vect}\{B_{i_2}^{i_3} B_{i_1}^{i_2} x, i_1, i_2, i_3 \in V\}.$$

Exemple 2.4. Nous exposons ici un exemple de marche quantique ouverte non irréductible. Considérons $V = \{0, 1\}$, $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^2$,

$$B_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}I \otimes |0\rangle\langle 0|, \quad B_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes |1\rangle\langle 0|,$$

$$B_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}I \otimes |1\rangle\langle 1| \text{ et } B_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes |0\rangle\langle 1|.$$

Graphiquement, cela donne la représentation suivante.



Pour $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes |0\rangle$, alors

$$\mathbb{C}[B_i^j]x = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes |0\rangle, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes |1\rangle \right\} \neq \mathcal{K},$$

donc la marche quantique ouverte associée à $\mathcal{M}(\mu) = \sum_{i,j \in V} B_i^j \mu B_i^{j*}$ n'est pas irréductible.

De la même manière que dans le cas classique, on peut essayer de partitionner V en classes de sorte que la chaîne de Markov restreinte à chaque classe soit irréductible. Ce travail a été fait dans [CP16a]. Les mêmes auteurs ont étudié la notion de période pour les marches quantiques ouvertes dans l'article [CP16b]. Nous ne détaillerons pas ce point dans ce manuscrit car la notion de période est moins pertinente pour les chaînes de Markov à temps continu, et donc moins pertinente également pour les marches quantiques ouvertes à temps continu qui sont les modèles qui motivent cette thèse.

2.5.2 Transience et récurrence

La transience et la récurrence sont des propriétés classiques des chaînes de Markov. On rappelle qu'un site $i \in V$ d'une chaîne de Markov $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est transient (resp. récurrent) si $\mathbb{E}_i(n_i) < \infty$ (resp. $\mathbb{E}_i(n_i) = \infty$) où $n_i = \sum_n \mathbb{1}_{Y_n=i}$ est le temps de séjour de la chaîne sur le site i , $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | Y_0 = i)$ et $\mathbb{E}_i(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot | Y_0 = i)$. Dans le cadre classique, ces notions peuvent être caractérisées par le premier temps d'atteinte $\tau_i = \inf\{n \geq 1, Y_n = i\}$. En effet, un site est transient (resp. récurrent) si $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) < 1$ (resp. $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = 1$). Cette dernière propriété ne sera pas toujours vraie dans le cadre des marches quantiques ouvertes.

On rappelle également que tous les sites d'une chaîne de Markov irréductible sont ou transients ou récurrents ([Nor98]). Dans le cadre quantique, la dichotomie transience-récurrence sera remplacée par une trichotomie (voir [BBP17]). Dorénavant, on travaillera principalement avec des marches quantiques ouvertes semi-finies que l'on définit ci-dessous.

Définition 2.5. On dit qu'une marche quantique ouverte est semi-finie si

$$\dim(\mathcal{H}_i) < \infty$$

pour tout i dans V .

On considère le processus $(\rho_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini dans la Proposition 2.3, et on définit n_i le temps de séjour de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur le site i :

$$n_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{X_n=i}$$

et τ_i le premier temps d'atteinte du site i pour $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\tau_i = \inf\{n \geq 1, X_n = i\}.$$

Le théorème suivant nous permettra de définir les notions de transience et de récurrence pour les marches quantiques ouvertes.

Théorème 2.1 (Corrolaire 3.10 de [BBP17]). *Soit \mathcal{M} une marche quantique ouverte irréductible et semi-finie. Nous sommes dans une (et une seule) de ces situations :*

1. la quantité $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_i)$ est finie pour tout i, j dans V et pour tout $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$;
2. la quantité $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_i)$ est infinie pour tout i, j dans V et pour tout $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$.

Définition 2.6. Une marche quantique ouverte semi-finie \mathcal{M} est dite transiente si elle satisfait la première propriété du Théorème 2.1 et récurrente si elle satisfait la deuxième propriété.

Comme mentionné plus haut, contrairement au cas classique, on ne peut pas caractériser la récurrence ou la transience d'une marche quantique ouverte grâce aux premiers temps d'atteinte τ_i . Néanmoins, il existe une trichotomie qui permet de différencier trois cas distincts.

Théorème 2.2 (Théorème 3.1 de [BBP17]). *Soit \mathcal{M} une marche quantique ouverte irréductible et semi-finie. Nous sommes dans une (et une seule) de ces situations :*

1. pour tout i, j dans V , pour tout ρ dans $\mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$,

$$\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) = \infty \text{ et } \mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = 1 ;$$

2. pour tout i, j dans V , pour tout ρ dans $\mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$,

$$\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) < \infty \text{ et } \mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_i < \infty) < 1 ;$$

3. pour tout i, j dans V , pour tout ρ dans $\mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$, $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) < \infty$, mais il existe i dans V et ρ, ρ' dans $\mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$ (ρ nécessairement non fidèle) tels que

$$\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_i < \infty) = 1 \text{ et } \mathbb{P}_{i,\rho'}(\tau_i < \infty) < 1.$$

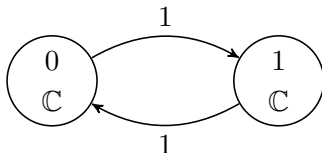
Illustrons chaque situation du théorème ci-dessus par des exemples.

Exemple 2.5. Le n -ième exemple illustre la n -ième situation du Théorème 2.2.

1. Sur $\mathcal{K} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^{\{0,1\}}$, on considère une des marches quantiques les plus simples caractérisée par les opérateurs :

$$A_0^1 = A_1^0 = 1.$$

Le graphique associé est donné ci-dessous.



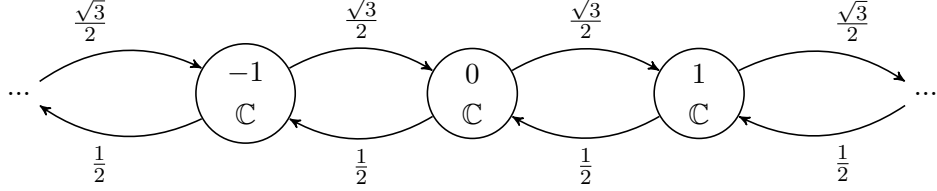
Alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la chaîne de Markov qui saute presque sûrement de 1 à 0 et de 0 à 1.

Toute marche quantique ouverte irréductible, semi-finie et de graphe V fini, se situe dans la situation 1 du Théorème 2.2.

2. Sur $\mathcal{K} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, on considère la marche quantique ouverte définie par

$$A_i^{i+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, A_i^{i-1} = \frac{1}{2}, \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}.$$

Le résumé graphique de cet exemple est le suivant.



Le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une marche aléatoire classique où la probabilité de sauter vers la droite est égale à $\frac{3}{4}$ et la probabilité de sauter vers la gauche est égale à $\frac{1}{4}$.

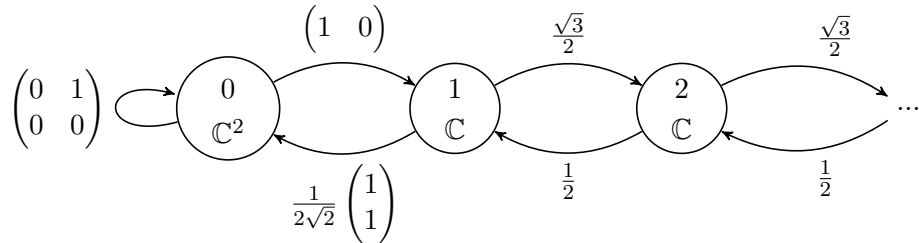
Une chaîne de Markov sur V peut être vue comme une marche quantique ouverte sur $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^V$. Toutes les chaînes de Markov transientes se trouvent dans la situation 2.

3. La troisième situation est la plus étonnante, elle n'apparaît jamais en classique. On reprend l'Exemple 5.2. de [BBP17]. Considérons la marche quantique ouverte définie sur $V = \mathbb{N}$ avec $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^2$ et $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}$ pour $i \geq 1$, et

$$A_0^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_0^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1^0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_i^{i+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ pour } i \geq 1 \text{ et } A_i^{i-1} = \frac{1}{2} \text{ pour } i \geq 2.$$

Le résumé graphique qui suit est plus pertinent.



C'est un exemple de marche quantique ouverte irréductible où

$$\mathbb{P}_{0,\rho}(\tau_0 < \infty) = 1 \text{ pour } \rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{P}_{0,\rho'}(\tau_0 < \infty) < 1 \text{ pour } \rho' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.6 Théorèmes asymptotiques pour les marches quantiques ouvertes homogènes sur \mathbb{Z}^d

Dans cette partie, nous nous intéressons au théorème ergodique, au théorème central limite et au principe de grandes déviations pour un cas particulier de marches quantiques ouvertes. Plus précisément, on étudie les marches quantiques ouvertes homogènes aux plus proches voisins sur \mathbb{Z}^d .

Il s'avère que ces marches quantiques ont des comportements asymptotiques assez classiques. En effet, on a déjà remarqué que les distributions des marches quantiques ouvertes semblent tendre vers des lois gaussiennes (voir Exemple 2.1).

Une légère extension est apportée à l'article originel [AGPS15], on considère que le marcheur peut rester sur place (cela se traduit par l'introduction de l'opérateur A_0). La Section 3.8 sur le modèle continu s'inspire des résultats et des démonstrations présentés ci-dessous.

Posons tout d'abord quelques notations : $d \in \mathbb{N}^*$, $\{e_1, \dots, e_d\}$ la base canonique de \mathbb{Z}^d , $e_{d+r} = -e_r$ pour tout $r \in \{1, \dots, d\}$ et $e_0 = 0$. On note $x.y$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^d , $|x|$ la norme associée et enfin x_r les coordonnées du vecteur $x \in \mathbb{R}^d$ dans la base $(e_r)_{r \in \{1, \dots, d\}}$, c'est-à-dire $x_r = x.e_r$.

Les marches quantiques ouvertes homogènes aux plus proches voisins sur \mathbb{Z}^d sont régies par un canal quantique \mathcal{M} de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathcal{I}_1(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}) \\ \mu &\mapsto \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^d} B_i^j \mu B_i^{j*} \end{aligned} \quad (2.3)$$

où \mathcal{H} est un espace de Hilbert de dimension finie et

$$\begin{aligned} B_i^j &= A_r \otimes |j\rangle\langle i| \quad \text{si } j = i + e_r \text{ où } r \in \{0, \dots, 2d\}, \\ &= 0 \quad \text{sinon,} \end{aligned}$$

avec $A_r \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour tout $r \in \{0, \dots, 2d\}$ tel que

$$\sum_{r=0}^{2d} A_r^* A_r = I.$$

L'opérateur B_i^j transcrit l'idée que l'on peut passer uniquement de i à un de ses voisins $i + e_r$, et que dans ce cas, la transformation sur \mathcal{H} est régie par A_r .

Il s'avère que pour ce type particulier de marche quantique, le paramètre interne ne dépend pas de la position de la particule. Dorénavant, on notera $\tilde{\mathcal{M}}$ le canal quantique associé à l'évolution moyenne du paramètre interne :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}} : \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \\ \rho &\mapsto \sum_{r=0}^{2d} A_r \rho A_r^*. \end{aligned}$$

Nous donnons à présent la définition des trajectoires quantiques pour les marches quantiques ouvertes aux plus proches voisins sur \mathbb{Z}^d . Si l'état initial du système sur $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$ est

$$\mu^{(0)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho^{(0)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|,$$

les trajectoires quantiques associées à \mathcal{M} sont données par la chaîne de Markov $(\rho_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \times \mathbb{Z}^d$ de distribution initiale :

$$\mathbb{P} \left((\rho_0, X_0) = \left(\frac{\rho^{(0)}(i)}{\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))}, i \right) \right) = \text{Tr}(\rho^{(0)}(i))$$

telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \dots, 2d\}$,

$$(\rho_{n+1}, X_{n+1}) = \left(\frac{A_r \rho_n A_r^*}{\text{Tr}(A_r \rho_n A_r^*)}, X_n + e_r \right) \text{ avec probabilité } \text{Tr}(A_r \rho_n A_r^*). \quad (2.4)$$

2.6.1 Théorème ergodique

Cette section est consacrée au théorème ergodique tiré de l'article [KM04] de Kümmerer et Maassen.

Théorème 2.3 (Théorème 5 de [KM04]). *Soit $(\rho_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la chaîne de Markov définie grâce à l'équation (2.4), alors*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \rho_k \xrightarrow{p.s.} \theta_\infty$$

où θ_∞ est une variable aléatoire à valeurs dans les invariants de $\tilde{\mathcal{M}}$ appartenant à $\mathcal{S}(\mathcal{H})$.

En particulier, si $\tilde{\mathcal{M}}$ admet un unique état invariant noté ρ_{inv} , alors la moyenne de Cesàro ci-dessus converge presque sûrement vers ρ_{inv} .

2.6.2 Théorème central limite

Dans cette section, nous étudions le théorème central limite tiré de l'article [AGPS15]. Tout d'abord, énonçons un lemme qui sera utile dans l'énoncé et la démonstration du Théorème 2.5 qui est le résultat principal de cette section.

Lemme 2.1 ([AGPS15]). *Supposons que $\tilde{\mathcal{M}}$ admette un unique invariant appartenant à $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ noté ρ_{inv} . Posons $m = \sum_{r=1}^{2d} \text{Tr}(A_r \rho_{inv} A_r^*) e_r$. Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, l'équation*

$$L_u - \tilde{\mathcal{M}}^*(L_u) = \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) A_r^* A_r - (m \cdot u) I \quad (2.5)$$

admet une solution et la différence de deux solutions quelconques de (2.5) est un multiple de l'identité.

On notera par la suite L_u la solution de (2.5) telle que $\text{Tr}(L_u) = 0$. De plus, si $u = e_r$, alors on note plus simplement $L_u = L_r$. On remarque que

$$L_u = \sum_{r=1}^d u_r L_r.$$

Énonçons à présent le théorème central limite pour les martingales qui est fondamental dans la démonstration du Théorème 2.5.

Théorème 2.4 (Corolaire 3.1 de [HH80]). *Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale réelle, centrée et de carré intégrable pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si, pour tout $\epsilon > 0$, les convergences en probabilité suivantes sont vérifiées :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 \mathbf{1}_{|\Delta M_k| \geq \epsilon \sqrt{n}} | \mathcal{F}_{k-1}] = 0 \quad (2.6)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = \sigma^2 \quad (2.7)$$

pour un certain $\sigma \geq 0$, alors :

$$\frac{M_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Nous pouvons à présent formuler le théorème central limite qui est le théorème principal de cette partie.

Théorème 2.5 (Théorème 5.2 de [AGPS15]). *Soit $(\rho_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la trajectoire quantique définie via l'équation (2.4). Supposons que \mathcal{M} admette un unique invariant de $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ noté ρ_{inv} , alors*

$$\frac{X_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, C)$$

où

$$m = \sum_{r=1}^{2d} \text{Tr}(A_r \rho_{inv} A_r^*) e_r$$

et $C = (C_{rq})_{1 \leq r, q \leq d} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ avec

$$\begin{aligned} C_{rq} &= \delta_{rq} [\text{Tr}(A_r \rho_{inv} A_r^*) + \text{Tr}(A_{r+d} \rho_{inv} A_{r+d}^*)] - m_r m_q \\ &+ \text{Tr}(A_r \rho_{inv} A_r^* L_q) + \text{Tr}(A_q \rho_{inv} A_q^* L_r) \\ &- \text{Tr}(A_{r+d} \rho_{inv} A_{r+d}^* L_q) - \text{Tr}(A_{q+d} \rho_{inv} A_{q+d}^* L_r) \\ &- m_r \text{Tr}(\rho_{inv} L_q) - m_q \text{Tr}(\rho_{inv} L_r). \end{aligned}$$

Démonstration. On donne ici un résumé très succinct de la démonstration vue dans [AGPS15] ; seules les grandes lignes de la preuve sont exposées. Dans un premier temps, on fixe $u \in \mathbb{R}^d$ et grâce au Lemme 2.1, on trouve une solution de l'équation communément appelée *équation de Poisson*, c'est-à-dire qu'on trouve une fonction f sur $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \times \{e_r\}_{r \in \{0, \dots, 2d\}}$ telle que

$$(I - P)f(\rho, x) = x.u - m.u, \quad (2.8)$$

où P est le générateur de la chaîne de Markov $(\rho_n, \Delta X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, plus précisément, on a $Pf(\rho, x) = \mathbb{E}_{x, \rho}(f(\rho_1, X_1 - X_0))$. Le lecteur pourra consulter [MS02] afin d'obtenir plus de détails sur l'équation de Poisson pour les chaînes de Markov.

Dans un deuxième temps, nous allons décomposer la variable étudiée à l'aide d'une martingale et d'un processus borné. Grâce à l'équation de Poisson, on a

$$\begin{aligned} (X_n - nm).u &= X_0.u + \sum_{k=1}^n ((X_k - X_{k-1}) - m).u \\ &= X_0.u + \sum_{k=1}^n (I - P)f(\rho_k, \Delta X_k) \\ &= X_0.u + f(\rho_1, \Delta X_1) - Pf(\rho_n, \Delta X_n) + \sum_{k=2}^n (f(\rho_k, \Delta X_k) - Pf(\rho_{k-1}, \Delta X_{k-1})). \end{aligned}$$

On pose

$$M_n = \sum_{k=2}^n (f(\rho_k, \Delta X_k) - Pf(\rho_{k-1}, \Delta X_{k-1}))$$

et

$$R_n = X_0 \cdot u + f(\rho_1, \Delta X_1) - Pf(\rho_n, \Delta X_n),$$

de sorte que

$$(X_n - nm) \cdot u = M_n + R_n.$$

Le reste R_n n'apporte aucune contribution au théorème central limite. Il suffit alors d'obtenir un théorème central limite pour la martingale M_n .

Dans un troisième et dernier temps, on montre, grâce au théorème ergodique, que la martingale $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du Théorème 2.4. □

Illustrons le théorème ci-dessus par l'Exemple 2.1 vu en amont.

Exemple 2.6. On considère la marche quantique ouverte sur \mathbb{Z} définie par l'équation (2.3), où $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}^2$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}I, \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que cet exemple vérifie l'hypothèse du Théorème 2.5 avec

$$\rho_{inv} = \frac{1}{2}I; \quad m = 0; \quad L = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}; \quad C = \frac{7}{18}.$$

Le Théorème 2.5 stipule donc que

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{7}{18}\right).$$

Cette convergence justifie les allures observées dans l'Exemple 2.1.

Cet exemple clôt la sous-section sur le théorème central limite.

2.6.3 Principe de grandes déviations

Après l'étude d'un théorème central limite, la suite logique consiste à établir un principe de grandes déviations. Cette partie est inspirée de l'article [CP15].

Afin de prouver le principe de grandes déviations, il est nécessaire d'introduire un canal quantique déformé. Pour cela, on définit les opérateurs $A_r^{(u)} = e^{\frac{u \cdot e_r}{2}} A_r$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ et tout $r \in \{0, \dots, 2d\}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on note $\tilde{\mathcal{M}}_u$ le canal quantique associé aux opérateurs déformés $A_r^{(u)}$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_u : \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \\ \rho &\mapsto \sum_{r=0}^{2d} e^{u \cdot e_r} A_r \rho A_r^*. \end{aligned}$$

Nous allons voir que la notion d'irréductibilité vue dans la partie 2.5.1 est requise pour le principe de grandes déviations. On l'adapte ici dans le cadre des marches quantiques ouvertes semi-finies aux plus proches voisins sur \mathbb{Z}^d .

Proposition 2.6. Soit Φ un canal quantique associé aux opérateurs de Kraus $(A_r)_{r \in \{0, \dots, 2d\}}$. Alors, Φ est irréductible si et seulement si pour tout x non nul dans \mathcal{H} l'ensemble $\mathbb{C}[A_r]x$ est égal à \mathcal{H} , où $\mathbb{C}[A_r]$ est l'ensemble des polynômes en A_r .

Le théorème de Perron-Frobenius pour les applications complètement positives sera un outil nécessaire dans la démonstration du principe de grandes déviations, on l'énonce ci-dessous. Le lecteur trouvera une démonstration dans [EHK78] ou dans [Sch00].

Proposition 2.7 ([EHK78]). Soient Φ une application complètement positive de $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ et λ une valeur propre de Φ telle que $|\lambda| = r(\Phi)$ (où $r(\Phi)$ est le rayon spectral de Φ) alors :

- ▶ $|\lambda|$ est une valeur propre pour Φ qui admet comme vecteur propre ρ un opérateur strictement positif (que l'on peut renormaliser pour obtenir un élément strictement positif de $\mathcal{S}(\mathcal{H})$);
- ▶ si Φ est irréductible alors $\dim(\text{Ker}(\Phi - \lambda I)) = 1$.

En particulier, si Φ est irréductible, alors $r(\Phi)$ est une valeur propre de Φ de multiplicité géométrique égale à 1 et admet un vecteur propre qui est un élément strictement positif de $\mathcal{S}(\mathcal{H})$.

Remarque. Si on suppose de plus que Φ préserve la trace, alors $r(\Phi) = 1$. Dans ce cas, si Φ est irréductible alors Φ admet un unique état fidèle qui est invariant par Φ . La réciproque est également vraie (voir section 7 de [CP16b]) : si Φ admet un unique invariant strictement positif de $\mathcal{S}(\mathcal{H})$, alors Φ est irréductible.

Nous allons maintenant énoncer deux lemmes, utiles dans la démonstration du théorème principal de cette partie, dont on trouvera les démonstrations dans [CP15]. Le premier lemme illustre le lien entre $\tilde{\mathcal{M}}_u$ et la fonction génératrice des moments de $X_n - X_0$, tandis que le deuxième fournit des informations sur le rayon spectral de $\tilde{\mathcal{M}}_u$.

Lemme 2.2 ([CP15]). Soit $(\rho_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la trajectoire quantique définie via l'équation (2.4). Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E} \left(e^{u \cdot (X_n - X_0)} \right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \text{Tr} \left(\tilde{\mathcal{M}}_u^n(\rho^{(0)}(i)) \right).$$

Lemme 2.3 ([CP15]). Supposons que $\tilde{\mathcal{M}}$ soit irréductible. Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, le rayon spectral de $\tilde{\mathcal{M}}_u$, que l'on notera $\lambda_u = r(\tilde{\mathcal{M}}_u)$, est une valeur propre de $\tilde{\mathcal{M}}_u$ de multiplicité algébrique égale à 1, et admet un vecteur propre v_u qui est un élément strictement positif de $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. De plus, la fonction $\lambda : u \mapsto \lambda_u$ peut être prolongée analytiquement sur un voisinage de \mathbb{R}^d .

Énonçons à présent une version particulière du théorème de Gärtner-Ellis. Ce résultat constitue le cœur de la démonstration du Théorème 2.7. Rappelons tout d'abord la définition d'une bonne fonction de taux.

Définition 2.7. Une application $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite une bonne fonction de taux si $I \neq \infty$, et si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R}^d, I(x) \geq a\}$ est un compact.

Théorème 2.6 (Gärtner-Ellis [DZ10]). Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires sur \mathbb{R}^d . Notons $\Lambda_n : u \mapsto \log \left(\mathbb{E} \left(e^{u \cdot Z_n} \right) \right)$ le logarithme de la fonction génératrice des moments de Z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. S'il existe une fonction $\Lambda : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ différentiable telle que, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(nu) = \Lambda(u),$$

alors $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un principe de grandes déviations associé à la bonne fonction de taux :

$$\Lambda^* : x \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}^d} (u \cdot x - \Lambda(u)).$$

Explicitement, cela signifie que pour tout ensemble ouvert G et tout ensemble fermé F tels que $G \subset F \subset \mathbb{R}^d$,

$$- \inf_{x \in G} \Lambda^*(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z_n \in G) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z_n \in F) \leq - \inf_{x \in F} \Lambda^*(x).$$

On peut dorénavant énoncer le théorème de grandes déviations.

Théorème 2.7 ([CP15]). *Soit $(\rho_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la trajectoire quantique définie via l'équation (2.4). Si $\tilde{\mathcal{M}}$ est irréductible, alors $(\frac{X_n - X_0}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ admet un principe de grandes déviations associé à la bonne fonction de taux :*

$$\Lambda^* : x \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}^d} (ux - \log(\lambda_u)).$$

Explicitement, cela signifie que pour tout ensemble ouvert G et tout ensemble fermé F tels que $G \subset F \subset \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} - \inf_{x \in G} \Lambda^*(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left(\frac{X_n - X_0}{n} \in G \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left(\frac{X_n - X_0}{n} \in F \right) \leq - \inf_{x \in F} \Lambda^*(x). \end{aligned}$$

Remarque. De plus, si $\mathbb{E}(e^{u \cdot X_0}) < \infty$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, alors le principe de grandes déviations est encore valable pour X_n à la place de $X_n - X_0$.

Démonstration. Par souci de simplicité, nous démontrons le théorème uniquement dans le cas où il existe $i \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\rho^{(0)}(i) > 0$. En effet, la démonstration des autres cas est similaire et ne présente pas d'intérêt mathématique particulier. Nous invitons le lecteur à consulter [CP15] s'il souhaite une démonstration exhaustive.

L'opérateur $\tilde{\mathcal{M}}$ étant irréductible, le Lemme 2.3 fournit l'existence d'un état fidèle v_u tel que $\tilde{\mathcal{M}}_u(v_u) = \lambda_u v_u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$, posons $r_{u,i} = \min(\text{Sp}(\rho^{(0)}(i)))$ et $s_{u,i} = \frac{\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))}{\min \text{Sp}(v_u)}$ (où $\text{Sp}(f)$ désigne le spectre de f). Grâce à la réduction simultanée de deux formes hermitiennes définies positives, $\text{Sp}(\rho^{(0)}(i) - r_{u,i} v_u) \subset \mathbb{R}^+$ et $\text{Sp}(s_{u,i} v_u - \rho^{(0)}(i)) \subset \mathbb{R}^+$. On obtient donc les inégalités suivantes :

$$r_{u,i} v_u \leq \rho^{(0)}(i) \leq s_{u,i} v_u,$$

et donc

$$r_{u,i} \lambda_u^n v_u \leq \tilde{\mathcal{M}}_u^n(\rho^{(0)}(i)) \leq s_{u,i} \lambda_u^n v_u.$$

Grâce au Lemme 2.2, la somme des traces de l'équation ci-dessus donne :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} r_{u,i} \lambda_u^n \leq \mathbb{E} \left(e^{u \cdot (X_n - X_0)} \right) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} s_{u,i} \lambda_u^n.$$

Les sommes de l'inégalité ci-dessus sont finies et strictement positives, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left(\mathbb{E} \left(e^{u \cdot (X_n - X_0)} \right) \right) = \log(\lambda_u). \quad (2.9)$$

Si l'on note $\Lambda_n : u \mapsto \log \left(\mathbb{E} \left(e^{u \cdot \frac{X_n - X_0}{n}} \right) \right)$ le logarithme de la fonction génératrice des moments de $\frac{X_n - X_0}{n}$, et $\Lambda : u \mapsto \log(\lambda_u)$ (qui est une fonction analytique d'après le Lemme 2.3), on a montré que, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(nu) = \Lambda(u).$$

Le théorème de Gärtner-Ellis (Théorème 2.6) peut donc être appliqué, ce qui fournit le résultat attendu avec

$$\Lambda^* : x \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}^d} (u \cdot x - \log(\lambda_u)).$$

□

Illustrons le théorème ci-dessus par l'Exemple 2.1 vu en amont.

Exemple 2.7. On considère la marche quantique ouverte sur \mathbb{Z} définie par l'équation (2.3), où $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}^2$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}I, \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'unique état invariant de $\tilde{\mathcal{M}}$ est $\rho_{inv} = \frac{1}{2}I$. Cet état s'avère être fidèle, donc $\tilde{\mathcal{M}}$ est irréductible (cette implication est prouvée dans la section 7 de [CP16b]). Cet exemple vérifie donc l'hypothèse du Théorème 2.7, c'est pourquoi $(\frac{X_n - X_0}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ admet un principe de grandes déviations avec Λ^* comme bonne fonction de taux.

Essayons à présent d'exprimer la bonne fonction de taux. Dans ce but, pour tout u dans \mathbb{R} , nous écrivons $\tilde{\mathcal{M}}_u$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$\tilde{\mathcal{M}}_u = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} e^u + e^{-u} + 3 & e^u & e^u & e^u \\ -e^{-u} & e^u + e^{-u} + 3 & 0 & e^u \\ -e^{-u} & 0 & e^u + e^{-u} + 3 & e^u \\ e^{-u} & -e^{-u} & -e^{-u} & e^u + e^{-u} + 3 \end{pmatrix}.$$

Par le calcul, on trouve :

$$\lambda_u = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(e^u + e^{-u} + (e^u + e^{-u} + \sqrt{e^{2u} + e^{-2u} + 3})^{\frac{1}{3}} - (e^u + e^{-u} + \sqrt{e^{2u} + e^{-2u} + 3})^{-\frac{1}{3}} \right).$$

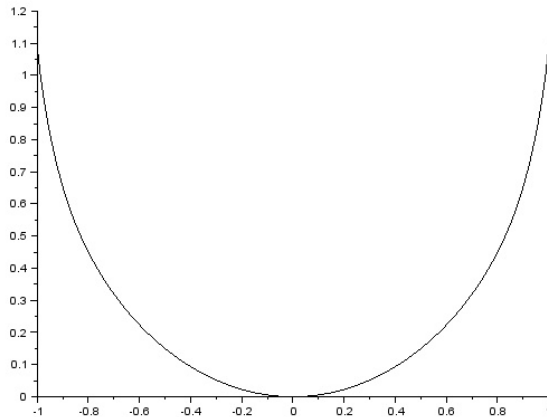
Afin de trouver une formule analytique pour

$$\Lambda^* : x \mapsto (\Lambda')^{-1}(x)x - \log(\lambda_{(\Lambda')^{-1}(x)}),$$

il est nécessaire d'inverser la fonction $\Lambda' : u \mapsto \frac{d\lambda_u}{du} \times \frac{1}{\lambda_u}$.

L'inversion de Λ' étant trop complexe au regard de λ_u , nous allons plutôt utiliser des simulations numériques pour obtenir Λ^* .

Ci-dessous, une simulation de la bonne fonction de taux Λ^* associée à $(\frac{X_n - X_0}{n})_{n \in \mathbb{N}}$:



Cet exemple clôt le chapitre sur les marches quantiques ouvertes à temps discret. Ces marches ont inspiré un modèle à temps continu. Cette extension continue sera présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Marches quantiques ouvertes à temps continu

Sommaire

3.1	Définition du modèle	48
3.2	Lien avec les chaînes de Markov à temps continu	50
3.3	Exemple	51
3.4	Développement de Dyson	52
3.5	Trajectoires quantiques	53
3.6	Des marches quantiques ouvertes discrètes vers celles continues	59
3.7	Propriétés	60
3.8	Théorèmes asymptotiques pour les marches quantiques ouvertes sur \mathbb{Z}^d	66

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'extension quantique naturelle des chaînes de Markov à temps continu : *les marches quantiques ouvertes à temps continu*. Ces marches sont qualifiées d'ouvertes car elles sont inspirées des modèles vus dans le Chapitre 1 sur les systèmes quantiques ouverts. Elles ont été introduites comme limite des marches quantiques ouvertes à temps discret par C. Pellegrini ([Pel14]).

Sans entrer dans les détails, on étudie l'évolution d'un "marcheur" qui saute de site en site à des moments aléatoires sur un graphe donné. Comme dans le cas classique, un marcheur reste sur une position pendant un temps aléatoire (qui suit une loi exponentielle), puis saute sur un autre site. Dans notre contexte, les temps de saut dépendent du paramètre interne. C'est pourquoi des comportements différents du contexte classique peuvent être observés.

Il est important de noter que, généralement, afin d'étudier une chaîne de Markov à temps continu, il suffit d'étudier la valeur du processus aux instants de saut. En particulier, il est connu que les durées entre les sauts sont indépendantes et identiquement distribuées. Par conséquent, le processus aux temps de saut peut être considéré comme une chaîne de Markov à temps discret et toutes les propriétés de cette chaîne (irréductibilité, récurrence, ...) sont transférées au processus à temps continu. Dans notre contexte, ce n'est pas le cas. En effet, le processus aux temps de saut ne peut pas être considéré comme une marche quantique ouverte à temps discret. Une analyse spécifique est alors nécessaire pour étudier les marches quantiques ouvertes à temps continu.

3.1 Définition du modèle

Dans cette partie, nous allons introduire le cadre mathématique permettant de définir les marches quantiques ouvertes à temps continu qui sont les analogues quantiques des chaînes de Markov à temps continu. Les notations de la Section 2.1 sont conservées.

On s'intéresse à des évolutions continues sur le système $\mathcal{K} = \bigoplus_{i \in V} \mathcal{H}_i \otimes |i\rangle$, qui préservent

$$\mathcal{D} = \left\{ \mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K}), \mu = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i|, \rho(i) \geq 0, \sum_{i \in V} \text{tr}(\rho(i)) = 1 \right\}.$$

En particulier, ces dynamiques sont décrites par des lindbladiens. Dans ce chapitre, on se concentre sur des opérateurs de Lindblad spécifiques.

Proposition 3.1. [Pel14] Soit \mathcal{L} le lindbladien suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) \\ \mu &\mapsto -i[\mathbf{H}, \mu] + \sum_{\substack{i, j \in V \\ i \neq j}} (S_i^j \mu S_i^{j*} - \frac{1}{2} \{S_i^{j*} S_i^j, \mu\}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $[X, Y] = XY - YX$, $\{X, Y\} = XY + YX$, pour $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, et $\mathbf{H}, (S_i^j)_{i, j \in V}$ sont des opérateurs bornés de \mathcal{K} tels que :

- $\mathbf{H} = \sum_{i \in V} H_i \otimes |i\rangle\langle i|$, où H_i sont des opérateurs auto-adjoints sur \mathcal{H}_i ;
- pour tout i et j distincts dans V , $S_i^j = R_i^j \otimes |j\rangle\langle i|$ où $R_i^j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$ tels que

$$\sum_{\substack{i, j \in V \\ i \neq j}} S_i^j S_i^{j*}$$

converge fortement.

L'équation

$$\frac{d}{dt} \mu^{(t)} = \mathcal{L}(\mu^{(t)}), \quad (3.2)$$

avec condition initiale $\mu^{(0)} = \sum_{i \in V} \rho^{(0)}(i) \otimes |i\rangle\langle i| \in \mathcal{D}$ admet une unique solution $(\mu^{(t)})_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathcal{D} .

Plus précisément, $\mu^{(t)}$ est de la forme $\mu^{(t)} = \sum_{i \in V} \rho^{(t)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|$ où

$$\frac{d}{dt} \rho^{(t)}(i) = -i[\mathbf{H}_i, \rho^{(t)}(i)] + \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} (R_j^i \rho^{(t)}(j) R_j^{i*} - \frac{1}{2} \{R_j^{i*} R_j^i, \rho^{(t)}(i)\}), \quad (3.3)$$

pour tout $i \in V$.

Cette proposition nous permet de définir les marches quantiques ouvertes continues.

Définition 3.1. L'évolution (3.2) est appelée marche quantique ouverte à temps continu sur V . Cette évolution est régie par un semi-groupe de Markov quantique $\mathcal{T} = (e^{t\mathcal{L}}(\cdot))_{t \geq 0}$. Pour tout $t \geq 0$ et tout $i \in V$, les quantités

$$q_t(i) = \text{Tr}(\rho^{(t)}(i))$$

définissent une mesure de probabilité q_t sur V appelée "la distribution de probabilité de la marche quantique ouverte à l'instant t ".

Introduisons à présent une nouvelle écriture, essentielle pour la suite (Section 3.4), de l'opérateur de Lindblad (3.1). Pour cela, on pose

$$G = -iH - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} S_i^{j*} S_i^j,$$

ce qui donne l'expression suivante pour \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}(\cdot) = G \cdot + \cdot G^* + \sum_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} S_i^j \cdot S_i^{j*}. \quad (3.4)$$

Réciproquement, si on considère un lindbladien \mathcal{L} de la forme (3.4) alors \mathcal{L} admet une écriture comme dans l'équation (3.1) si et seulement si

$$G + G^* + \sum_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} S_i^{j*} S_i^j = 0. \quad (3.5)$$

L'équation ci-dessus est cruciale car elle permet notamment au semi-groupe de préserver la trace.

Grâce à la décomposition de H par blocs $\left(H = \sum_{i \in V} H_i \otimes |i\rangle\langle i| \right)$, on peut écrire

$$G = \sum_{i \in V} G_i \otimes |i\rangle\langle i|$$

où

$$G_i = -iH_i - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} R_i^{j*} R_i^j.$$

À l'aide des opérateurs $(G_i)_{i \in V}$, on obtient une nouvelle écriture pour l'équation (3.3) :

$$\frac{d}{dt} \rho^{(t)}(i) = G_i \rho^{(t)}(i) + \rho^{(t)}(i) G_i^* + \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} R_j^i \rho^{(t)}(j) R_j^{i*}, \quad (3.6)$$

pour tout $i \in V$. L'opérateur R_i^j décrit la transformation de l'espace d'état interne lorsque la particule saute de i sur j . Dans le cas où la particule située sur i reste sur place, l'évolution sur \mathcal{H}_i est dirigée par G_i . L'égalité (3.5) se transcrit comme suit. Pour tout $i \in V$,

$$G_i + G_i^* + \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} R_i^{j*} R_i^j = 0.$$

On retrouve la même condition que pour une matrice de taux de transition $(q_{ij})_{i,j \in V}$ d'une chaîne de Markov à temps continu :

$$q_{ii} + \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} q_{ij} = 0,$$

pour tout i dans V . Plus précisément, nous allons voir dans ce qui suit que les marches quantiques ouvertes continues sont des généralisations de marches aléatoires continues classiques.

3.2 Lien avec les chaînes de Markov à temps continu

La prochaine proposition montre comment il est possible de construire une chaîne de Markov à temps continu classique à l'aide d'une marche quantique ouverte. Rappelons qu'une chaîne de Markov à temps continu $(Y_t)_{t \geq 0}$ sur V est définie par sa distribution initiale p_0 et sa matrice de taux de transition

$$Q = (q_{ij})_{i,j \in V}$$

où $q_{ij} \geq 0$ pour tout i et j distincts dans V et $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$ pour tout $i \in V$.

Proposition 3.2 ([Pel14]). Pour tout i et j distincts dans V , soient U_i^j un opérateur unitaire de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$ et $Q = (q_{ij})_{i,j \in V}$ une matrice de taux de transition. On pose, pour tout i et j distincts dans V ,

$$R_i^j = \sqrt{q_{ij}} U_i^j,$$

et, pour tout i dans V ,

$$G_i = \frac{q_{ii}}{2} I_{\mathcal{H}_i}.$$

Alors l'égalité

$$G_i + G_i^* + \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} R_i^{j*} R_i^j = 0$$

est vérifiée pour tout i dans V . De plus, pour tout état initial

$$\mu^{(0)} = \sum_{i \in V} \rho^{(0)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|,$$

les distributions $(q_t)_{t \geq 0}$ de la marche quantique ouverte sont celles d'une chaîne de Markov à temps continu classique sur V , de distribution initiale p_0 telle que $p_0(i) = \text{Tr}(\rho^{(0)}(i))$ pour tout i dans V et de matrice de taux de transition

$$Q = (q_{ij})_{i,j \in V}.$$

Démonstration. Tout d'abord, pour tout i dans V , on a bien

$$G_i + G_i^* + \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} R_i^{j*} R_i^j = q_{ii} I_{\mathcal{H}_i} + \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} q_{ij} U_i^{j*} U_i^j = \left(q_{ii} + \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} q_{ij} \right) I_{\mathcal{H}_i} = 0.$$

Par définition, $q_0 = p_0$. On examine à présent les équations différentielles vérifiées par les $(q_t(i))_{i \in V}$ qui découlent des équations (3.6) :

$$\frac{d}{dt} q_t(i) = -q_{ii} q_t(i) + \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} q_{ij} q_t(j),$$

pour tout i dans V . On obtient donc

$$\frac{d}{dt} q_t = Q q_t,$$

où $Q = (q_{ij})_{i,j \in V}$ est la matrice de taux de transition. Les distributions $(q_t)_{t \geq 0}$ sont alors dirigées par un semi-groupe de Markov classique $\mathcal{T} = (e^{tQ}(\cdot))_{t \geq 0}$. Ceci conclut la démonstration. \square

Les chaînes de Markov à temps continu classiques sont donc des cas particuliers de marches quantiques ouvertes. Avant d'aborder les trajectoires quantiques pour les marches quantiques ouvertes, illustrons notre propos par un exemple.

3.3 Exemple

Dans cette partie, les modèles définis en amont sont présentés à travers un exemple. On se concentre en particulier sur les marches sur $V = \mathbb{Z}$ telles que $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

L'une des marches quantiques ouvertes les plus basiques est donnée par la marche aléatoire sur \mathbb{Z} où le marcheur stagne, puis saute à droite ou saute à gauche. Ces transformations sont régies par G_0 , R_1 ou R_{-1} respectivement. On pose

$$G_i = G_0 \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z},$$

et

$$\begin{aligned} S_i^j &= R_1 \otimes |i+1\rangle\langle i| && \text{si } j = i+1 \\ &= R_{-1} \otimes |i-1\rangle\langle i| && \text{si } j = i-1 \\ &= 0 && \text{sinon,} \end{aligned}$$

tels que

$$G_0 + G_0^* + R_1^* R_1 + R_{-1}^* R_{-1} = 0. \quad (3.7)$$

La marche quantique ouverte $\mu^{(t)}$ est donc de la forme $\mu^{(t)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho^{(t)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|$ telle que

$$\frac{d}{dt} \rho^{(t)}(i) = G_0 \rho^{(t)}(i) + \rho^{(t)}(i) G_0^* + R_1 \rho^{(t)}(i-1) R_1^* + R_{-1} \rho^{(t)}(i+1) R_{-1}^*,$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

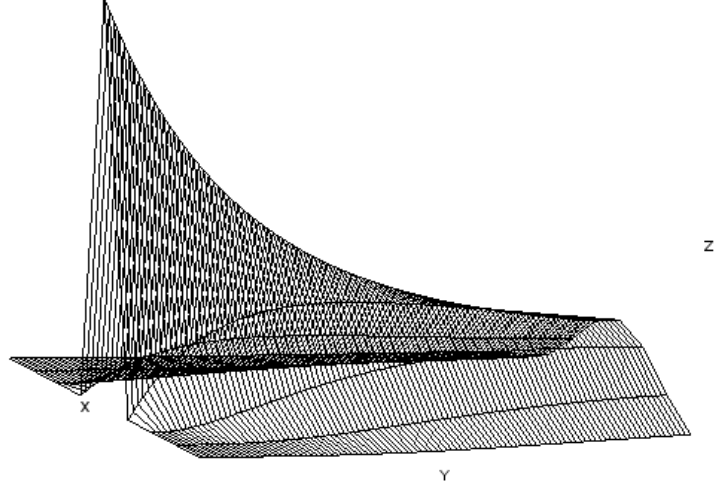
Exemple 3.1. Prenons un exemple concret, où $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}^2$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$G_0 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation (3.7) est bien vérifiée. En partant de l'état $\mu^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes |0\rangle\langle 0|$, on obtient une approximation numérique pour les distributions q_0 , $q_{0.1}$, q_1 et q_{10} :

	$ -3\rangle$	$ -2\rangle$	$ -1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 2\rangle$	$ 3\rangle$
q_0	0	0	0	1	0	0	0
$q_{0.1}$	0	0.000375	0.023875	0.953125	0.02225	0.000375	0
q_1	0.00175	0.037875	0.135375	0.660875	0.143625	0.01825	0.001625
q_{10}	0.082875	0.185	0.134875	0.194	0.101125	0.085	0.035625

L'évolution de la distribution de la marche aléatoire quantique est donnée ci-dessous. L'axe X représente $|i\rangle$ la position sur \mathbb{Z} (entre -5 et 5), l'axe Y représente t le temps (entre 0 et 10) et l'axe Z renvoie la probabilité $q_t(i)$.



Sur ces simulations numériques, la distribution de la marche quantique ouverte semble devenir gaussienne. Les propriétés asymptotiques seront étudiées plus en détail dans la Section 3.8.

Remarque. Contrairement au cas discret, le support de q_1 n'est pas restreint à $\{-1, 0, 1\}$. Dans cet exemple, le support de q_t est précisément égal à \mathbb{Z} pour tout $t \geq 0$.

Cette remarque met en avant la différence qui existe entre les modèles discret et continu. Nous allons voir dans le Théorème 3.1 que les notions d'irréductibilité et d'amélioration de la positivité sont équivalentes pour le modèle continu alors qu'elles ne le sont pas pour le modèle discret. Pour prouver cette équivalence, nous avons besoin d'introduire une expression pour la marche quantique ouverte à l'aide du développement de Dyson.

3.4 Développement de Dyson

Le but de cette section est d'obtenir une nouvelle expression de $\mu^{(t)} = e^{t\mathcal{L}}(\mu^{(0)})$ grâce au développement de Dyson. Rappelons que $\mu^{(0)} = \sum_{i \in V} \rho^{(0)}(i) \otimes |i\rangle\langle i| \in \mathcal{D}$ représente l'état initial du système et que l'opérateur de Lindblad \mathcal{L} peut s'écrire

$$\mathcal{L} = K + \Phi, \quad (3.8)$$

où $K(\cdot) = G \cdot + \cdot G^*$, $G \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ et Φ une application complètement positive de sorte que $\text{Tr}(\mathcal{L}(\mu)) = 0$ pour tout $\mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$.

Proposition 3.3. Soit $\mu^{(t)} = e^{t\mathcal{L}}(\mu^{(0)})$ la marche quantique ouverte définie dans la Proposition 3.1, avec $\mathcal{L} = K + \Phi$ une décomposition de Lindblad comme dans l'équation (3.8), alors

$$\mu^{(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} e^{(t-t_n)K} \Phi e^{(t_n-t_{n-1})K} \Phi \dots e^{(t_2-t_1)K} \Phi e^{t_1 K} (\mu^{(0)}) dt_1 \dots dt_n. \quad (3.9)$$

Démonstration. Posons

$$\Gamma_t = e^{-tK} e^{t\mathcal{L}}.$$

Cet opérateur vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt}\Gamma_t(\mu) = e^{-tK}\Phi e^{tK}\Gamma_t(\mu),$$

pour tout $\mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$. Sous forme intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma_t(\mu) &= \Gamma_0(\mu) + \int_0^t e^{-t_1K}\Phi e^{t_1K}\Gamma_{t_1}(\mu)dt_1 \\ &= \mu + \int_0^t e^{-t_1K}\Phi e^{t_1K}(\mu)dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} e^{-t_1K}\Phi e^{t_1K}e^{-t_2K}\Phi e^{t_2K}\Gamma_{t_2}(\mu)dt_2dt_1 \\ &= \mu + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} e^{-t_nK}\Phi e^{(t_n-t_{n-1})K}\Phi \dots e^{(t_2-t_1)K}\Phi e^{t_1K}(\mu)dt_1 \dots dt_n.\end{aligned}$$

De cette décomposition découle une nouvelle expression pour $\mu^{(t)} = e^{t\mathcal{L}}(\mu^{(0)})$,

$$\mu^{(t)} = e^{tK}(\mu^{(0)}) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} e^{(t-t_n)K}\Phi e^{(t_n-t_{n-1})K} \dots \Phi e^{t_1K}(\mu^{(0)})dt_1 \dots dt_n,$$

la série est bien convergente car le majorant ci-dessous est le terme d'une série convergente :

$$\left\| \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} e^{(t-t_n)K}\Phi e^{(t_n-t_{n-1})K} \dots \Phi e^{t_1K}(\mu^{(0)})dt_1 \dots dt_n \right\|_1 \leq \frac{t^n \|\Phi\|^n e^{tn\|K\|}}{n!} \|\mu^{(0)}\|_1.$$

□

Nous énonçons maintenant un corollaire découlant de la Proposition 3.3 qui donne une expression de $\mu^{(t)}$ impliquant les opérateurs de transition du lindbladien.

Corollaire 3.1. Soit $\mu^{(t)} = e^{t\mathcal{L}}(\mu^{(0)})$ la marche quantique ouverte définie dans la Proposition 3.1, où \mathcal{L} est l'opérateur de Lindblad (3.4) et $\mu^{(0)}$ est l'état initial du système, alors

$$\mu^{(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{i_0, \dots, i_n \in V \\ i_k \neq i_{k+1}}} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} T(\xi, t) \mu^{(0)} (T(\xi, t))^* dt_1 \dots dt_n, \quad (3.10)$$

où

$$\begin{aligned}T(\xi = (i_0, \dots, i_n, t_1, \dots, t_n), t) &= e^{(t-t_n)G} S_{i_{n-1}}^{i_n} \dots S_{i_0}^{i_1} e^{t_1G} \\ &= e^{(t-t_n)G_{i_n}} R_{i_{n-1}}^{i_n} \dots R_{i_0}^{i_1} e^{t_1G_{i_0}} \otimes |i_n\rangle\langle i_0|.\end{aligned}$$

La décomposition de Dyson sera cruciale dans la preuve du Théorème 3.1 (Section 3.7.1) ainsi que dans la définition des trajectoires quantiques.

3.5 Trajectoires quantiques

À l'instar des marches quantiques discrètes, les trajectoires quantiques continues sont des objets stochastiques qui décrivent la distribution d'une marche quantique ouverte. Ces trajectoires sont des processus markoviens où la composante représentant la position de la particule est une généralisation quantique des chaînes de Markov à temps continu. Formellement, les trajectoires quantiques modélisent l'évolution de l'état lorsqu'une mesure continue de la position de la particule est effectuée. L'état à l'instant t peut être décrit par un couple $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ où X_t est la position de la particule et ρ_t l'état quantique interne donné par le postulat de la réduction du paquet d'onde à l'instant t . Nous allons exposer deux manières équivalentes de définir les trajectoires quantiques.

3.5.1 Mesure sur les trajectoires quantiques

Cette section a pour objet d'introduire de façon rigoureuse la mesure de probabilité \mathbb{P}_μ sur l'ensemble des trajectoires possibles de la particule lorsque $\mu \in \mathcal{D}$ est l'état initial du système. Pour cela, nous nous inspirons de [BB91, BGM04, JPW14] en procédant en deux étapes. Tout d'abord, on définira l'espace de probabilité $(\Xi^t, \Sigma^t, \mathbb{P}_\mu^t)$ associé aux trajectoires quantiques jusqu'au temps t . Ensuite, nous étendrons cet espace afin d'obtenir l'espace probabilisé $(\Xi^\infty, \Sigma^\infty, \mathbb{P}_\mu)$ qui permet de définir les trajectoires quantiques continues.

Commençons par définir l'ensemble Ξ^t des trajectoires jusqu'au temps t :

$$\Xi^t = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \Xi_n^t$$

où

$$\Xi_n^t = \{\xi = (i_0, \dots, i_n, t_1, \dots, t_n) \in I^{n+1} \times \mathbb{R}^n, 0 < t_1 < \dots < t_n < t\}.$$

On munit l'espace Ξ_n^t de la σ -algèbre Σ_n^t et de la mesure ν_n^t induits par l'application suivante :

$$\begin{aligned} J_n : \left(I^n \times [0, t]^n, \mathcal{P}(I^{n+1}) \times \mathcal{B}([0, t]^n), \delta^n \times \frac{1}{n!} \lambda_n \right) &\rightarrow (\Xi_n^t, \Sigma_n^t, \nu_n^t) \\ (i_0, \dots, i_n, s_1, \dots, s_n) &\mapsto (i_0, \dots, i_n, s_{\min}, \dots, s_{\max}) \end{aligned}$$

où δ est la mesure comptage sur I et λ_n est la mesure de Lebesgue sur $[0, t]^n$ équipée de la tribu borélienne $\mathcal{B}([0, t]^n)$. On définit la σ -algèbre $\Sigma^t = \sigma(\Sigma_n^t, n \in \mathbb{N})$. Les mesures δ et λ_n sont σ -finies, on peut donc appliquer le théorème d'extension de Carathéodory¹ qui nous permet de définir la mesure ν^t sur (Ξ^t, Σ^t) telle que $\nu^t = \nu_n^t$ sur (Ξ_n^t, Σ_n^t) . L'espace Ξ^t des trajectoires quantiques est donc un espace mesuré.

Pour tout état initial $\mu \in \mathcal{D}$, on définit la mesure \mathbb{P}_μ^t sur l'espace Ξ^t des trajectoires quantiques jusqu'au temps t telle que, pour tout $E \in \Sigma^t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\mu^t(E) &= \int_E \text{Tr}(T(\xi, t) \mu(T(\xi, t))^*) d\nu^t(\xi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_0, \dots, i_n \in V} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} \mathbb{1}_{\xi \in E} \text{Tr}(T(\xi, t) \mu(T(\xi, t))^*) dt_1 \dots dt_n, \end{aligned} \quad (3.11)$$

où $\xi = (i_0, \dots, i_n, t_1, \dots, t_n) \in \Xi_n^t$ et

$$T(\xi = (i_0, \dots, i_n, t_1, \dots, t_n), t) = e^{(t-t_n)G_{i_n}} R_{i_{n-1}}^{i_n} \dots R_{i_0}^{i_1} e^{t_1 G_{i_0}} \otimes |i_n\rangle\langle i_0|.$$

Remarque. Les opérateurs de la forme R_i^j sont nuls, cela signifie que le paramètre interne effectue des sauts uniquement si le marcheur se déplace.

La mesure \mathbb{P}_μ^t est une mesure de probabilité. En particulier,

$$\mathbb{P}_\mu^t(\Xi^t) = \text{Tr}(e^{t\mathcal{L}}(\mu)) = 1.$$

On peut aller plus loin et définir une mesure de probabilité \mathbb{P}_μ sur l'ensemble des trajectoires quantiques. Notons que la famille des mesures de probabilité $\{\mathbb{P}_\mu^t\}_{t \geq 0}$ est consistante. En effet, $\mathbb{P}_\mu^{t+s}(E) = \mathbb{P}_\mu^t(E)$ pour tout t, s positifs et $E \in \Sigma^t$. Alors le théorème de consistance de Kolmogorov² nous permet d'étendre $\{\mathbb{P}_\mu^t\}_{t \geq 0}$ à une unique mesure de probabilité \mathbb{P}_μ sur $(\Xi^\infty, \Sigma^\infty)$. On peut à présent définir les trajectoires quantiques continues.

1. Voir [Doo12] pour une preuve.

2. Voir [Øks03] pour une preuve.

Définition 3.2. Soit $\mu \in \mathcal{D}$ et \mathcal{L} un opérateur de Lindblad (3.4) d'une marche quantique ouverte. Soit $(\Xi^\infty, \Sigma^\infty, \mathbb{P}_\mu)$ l'espace probabilisé défini en amont. On définit $(\omega_t)_{t \geq 0}$ la famille de variables aléatoires comme suit :

$$\begin{aligned} (\omega_t)_{t \geq 0} : (\Xi^\infty, \Sigma^\infty, \mathbb{P}_\mu) &\longrightarrow (\mathcal{S}(\mathcal{K}), \mathcal{T}) \\ \xi &\longmapsto \left(\frac{T(\xi_t, t) \mu(T(\xi_t, t))^*}{\text{Tr}(T(\xi_t, t) \mu(T(\xi_t, t))^*)} \right)_{t \geq 0} \end{aligned}$$

où \mathcal{T} est la tribu induite de $\mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ sur $\mathcal{S}(\mathcal{K})$,

$$\xi_t = (i_0, \dots, i_n, t_1, \dots, t_n) \text{ pour } n = \max\{k | t_k < t\}$$

et

$$T(\xi_t, t) = e^{(t-t_n)G_{i_n}} R_{i_{n-1}}^{i_n} \dots R_{i_0}^{i_1} e^{t_1 G_{i_0}} \otimes |i_n\rangle\langle i_0|.$$

On dit que la famille de variable aléatoire $(\omega_t)_{t \geq 0}$ est une *trajectoire quantique continue* d'une marche quantique ouverte.

Par la suite, on s'intéresse uniquement au cas où l'état initial est de la forme $\rho \otimes |i\rangle\langle i|$, c'est-à-dire lorsque la particule est initialement sur le site i munie du paramètre interne ρ . Dans ce cas, la probabilité correspondante \mathbb{P}_μ sera notée par abus $\mathbb{P}_{i,\rho}$. L'espérance associée à $\mathbb{P}_{i,\rho}$ sera quant à elle naturellement notée $\mathbb{E}_{i,\rho}$.

3.5.2 Équation maîtresse stochastique pour les marches quantiques ouvertes

On expose ici une autre façon de définir les trajectoires quantiques continues. Pour cela, nous aurons besoin d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dans lequel on considère des processus de Poisson $(N^{ij})_{i,j \in V}$ indépendants sur \mathbb{R}^2 . Le saut du site i au site j sera régi par le processus de Poisson N^{ij} . Dans cette section, on considère uniquement les marches quantiques ouvertes semi-finies, c'est-à-dire que \mathcal{H}_i est de dimension finie pour tout i dans V . La proposition suivante permet de définir les trajectoires quantiques pour les marches quantiques ouvertes à temps continu grâce aux processus de saut $(N^{ij})_{i,j \in V}$.

Proposition 3.4 ([Pel14]). Soit $\mu^{(t)} = e^{t\mathcal{L}}(\mu^{(0)})$ la marche quantique ouverte définie dans la Proposition 3.1, où \mathcal{L} est l'opérateur de Lindblad (3.4) et $\mu^{(0)} = \sum_{i \in V} \rho^{(0)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|$ est l'état initial du système. La trajectoire quantique décrivant la mesure continue de la position de la particule est le processus de Markov $(\omega_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathcal{D} tel que

$$\omega_0 = \frac{\rho^{(0)}(i)}{\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))} \otimes |i\rangle\langle i| \text{ avec probabilité } \text{Tr}(\rho^{(0)}(i))$$

et tel que

$$\omega_t = \omega_0 + \int_0^t \mathcal{K}(\omega_{s-}) ds + \sum_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{S_i^j \omega_{s-} S_i^{j*}}{\text{Tr}(S_i^j \omega_{s-} S_i^{j*})} - \omega_{s-} \right) \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(S_i^j \omega_{s-} S_i^{j*})} N^{ij}(dy, ds) \quad (3.12)$$

où

$$\mathcal{K}(\omega) = \mathcal{L}(\omega) - \sum_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} \left(S_i^j \omega S_i^{j*} - \omega \text{Tr}(S_i^j \omega S_i^{j*}) \right) = G\omega + \omega G^* - \omega \text{Tr}(G\omega + \omega G^*),$$

pour tout $\omega \in \mathcal{D}$.

Plus particulièrement, le processus de Markov $(\omega_t)_{t \geq 0}$ est de la forme

$$\omega_t = \rho_t \otimes |X_t\rangle\langle X_t|$$

pour t positif, $X_t \in V$ et $\rho_t \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_{X_t})$, tel que

$$\begin{aligned} \rho_t &= \rho_0 + \sum_{i \in V} \int_0^t \left(G_i \rho_{s-} + \rho_{s-} G_i^* - \rho_{s-} \text{Tr}(G_i \rho_{s-} + \rho_{s-} G_i^*) \right) \mathbb{1}_{X_{s-}=i} ds \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{R_i^j \rho_{s-} R_i^{j*}}{\text{Tr}(R_i^j \rho_{s-} R_i^{j*})} - \rho_{s-} \right) \mathbb{1}_{X_{s-}=i} \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(R_i^j \rho_{s-} R_i^{j*})} N^{ij}(dy, ds), \\ X_t &= X_0 + \sum_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (j - i) \mathbb{1}_{X_{s-}=i} \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(R_i^j \rho_{s-} R_i^{j*})} N^{ij}(dy, ds) \end{aligned}$$

et $(\rho_0, X_0) = \left(\frac{\rho^{(0)}(i)}{\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))}, i \right)$ avec probabilité $\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))$.

Une trajectoire quantique est donc déterminée par une équation différentielle stochastique. Décrivons brièvement comment construire une telle évolution. Le point d'origine (ρ_0, X_0) de notre trajectoire est obtenu en effectuant une mesure de la position, cette mesure renvoie $\left(\frac{\rho^{(0)}(i)}{\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))}, i \right)$ avec probabilité $\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))$. Admettons que nous ayons obtenu $X_0 = i$, on considère alors la solution $(\eta_t)_{t \geq 0}$ de la partie déterministe de l'équation différentielle stochastique, c'est-à-dire, pour tout $t \geq 0$,

$$\eta_t = \rho_0 + \int_0^t \left(G_i \eta_s + \rho_s G_i^* - \eta_s \text{Tr}(G_i \eta_s + \eta_s G_i^*) \right) ds. \quad (3.13)$$

On définit maintenant le premier temps de saut $T_1 = \inf_{j \neq i} \{T_1^j\}$ où

$$T_1^j = \inf \{t, N^{ij}(u, y | u \in [0, t], y \in [0, \text{Tr}(R_i^j \eta_u R_i^{j*})]) \geq 1\},$$

pour tout $j \neq i$. L'infimum est en fait un minimum car les processus de Poisson N^{ij} sont indépendants, on note j l'élément de V tel que $T_1 = T_1^j$. On peut maintenant définir la trajectoire quantique jusqu'au temps T_1 :

$$\forall t \in [0, T_1[, (\rho_t = \eta_t, X_t = i) \text{ et } \left(\rho_{T_1} = \frac{R_i^j \rho_{T_1-} R_i^{j*}}{\text{Tr}(R_i^j \rho_{T_1-} R_i^{j*})}, X_{T_1} = j \right).$$

On résout ensuite l'équation différentielle

$$\eta_t = \rho_{T_1} + \int_0^t \left(G_j \eta_s + \eta_s G_j^* - \eta_s \text{Tr}(G_j \eta_s + \eta_s G_j^*) \right) ds$$

qui nous permet de définir la trajectoire quantique jusqu'au deuxième temps de saut T_2 et ainsi de suite.

Remarque. Les deux façons de définir les trajectoires quantiques engendrent le même processus. Tous les détails ne figurant pas ici, le lecteur peut se référer aux articles [BB91, BGM04] pour une justification rigoureuse du lien entre ces deux approches. Il est toutefois important de noter que l'on peut construire l'équation différentielle stochastique

(3.12) dans l'espace probabilisé $(\Xi^\infty, \Sigma^\infty, \mathbb{P}_\mu)$. En effet, pour une trajectoire quelconque $\xi = (i_0, \dots, i_n, t_1, \dots, t_n)$ de Ξ^t , considérons le processus de comptage $\tilde{N}^{ij}(t)$ qui dénombre les sauts de i à j . Soit $(\omega_t)_{t \geq 0}$ la trajectoire quantique vue dans la Définition 3.2. Il a été prouvé dans [BB91] que

$$(\tilde{N}^{ij}(t)) \quad \text{et} \quad \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(S_i^j \omega_s - S_i^{j*})} N^{ij}(dy, ds) \right)$$

ont la même loi. De plus, on peut montrer que le processus $(\omega_t)_t$ de la Définition 3.2 satisfait

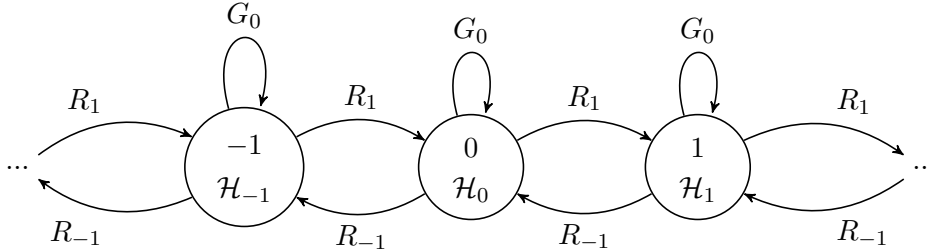
$$d\omega_t = \mathcal{K}(\omega_t)dt + \sum_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} \left(\frac{S_i^j \omega_s - S_i^{j*}}{\text{Tr}(S_i^j \omega_s - S_i^{j*})} - \omega_{s-} \right) d\tilde{N}^{ij}(t).$$

Pour ces raisons, une unique notation désigne les trajectoires quantiques de la Définition 3.2 et de la Proposition 3.4. Avant d'aborder les propriétés du processus $(\omega_t)_{t \geq 0}$, étudions des modèles très particuliers.

3.5.3 Exemple et cas particuliers

Exemple

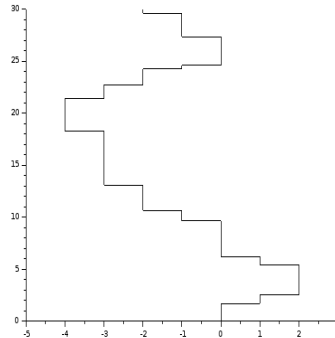
Étudions à présent un exemple de trajectoire quantique continue. Considérons à nouveau l'Exemple 3.1. Cet exemple est illustré par le graphe suivant.



On a $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}^2$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$G_0 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ci-dessous, une simulation numérique d'une trajectoire quantique où le temps t est en ordonnée et la position du marcheur X_t est en abscisse.



Cas où l'on retrouve une trajectoire classique

En examinant les trajectoires quantiques dans le cadre établi dans la Proposition 3.2, on remarque que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu classique sur V . Plus précisément, s'il existe $(U_i^j)_{i,j \in V} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)^{V^2}$ une famille d'opérateurs unitaires et $Q = (q_{ij})_{i,j \in V}$ une matrice de taux de transition telles que

$$R_i^j = \sqrt{q_{ij}} U_i^j,$$

et

$$G_i = \frac{q_{ii}}{2} I_{\mathcal{H}_i},$$

pour tout i et j distincts dans V , alors le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ défini dans la Proposition 3.4 est une chaîne de Markov à temps continu classique sur V de distribution initiale q_0 et de matrice de taux de transition $Q = (q_{ij})_{i,j \in V}$.

Décrivons plus en détail le processus $(X_t)_{t \geq 0}$. La position initiale X_0 prend la valeur i avec probabilité $\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))$, et dans ce cas là, la particule reste sur i durant un temps exponentiel de paramètre $-q_{ii}$ puis saute sur un nouvel état, en choisissant l'état j avec probabilité $\frac{q_{ij}}{-q_{ii}}$. Ensuite, sans prendre en compte sa trajectoire passée, elle reste sur le site j durant un temps exponentiel de paramètre $-q_{jj}$, et ainsi de suite.

Cas où le processus aux temps de sauts est une marche quantique

Il existe un autre cas intéressant qui est plus général que le cadre établi ci-dessus, pour lequel le processus associé au temps de saut est une marche quantique ouverte à "temps discret". On l'énonce dans la proposition ci-dessous.

Proposition 3.5. Soit $\mathcal{T} = \left(e^{t\mathcal{L}}(\cdot) \right)_{t \geq 0}$ la marche quantique ouverte définie dans la Proposition 3.1. Supposons qu'il existe une famille $(r_i)_{i \in V}$ de réels strictement positifs tels que

$$G_i = -\frac{r_i}{2} I_{\mathcal{H}_i},$$

pour tout i dans V . Alors le canal quantique

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) \\ \mu &\mapsto \sum_{i,j \in V} B_i^j \mu B_i^{j*}, \end{aligned}$$

tel que $B_i^j = \frac{R_i^j}{r_i} \otimes |j\rangle\langle i|$ pour tout i et j distincts dans V , définit une marche quantique ouverte discrète. De plus, le processus aux instants de saut de la trajectoire quantique continue est une trajectoire quantique discrète associée au canal quantique \mathcal{M} . Les temps de sauts sont alors indépendants et suivent une loi exponentielle de paramètre r_i lorsque la particule est située sur le site $i \in V$.

Le cadre de la proposition ci-dessus est très restrictif, il est donc souvent impossible de considérer le processus aux temps de sauts comme une trajectoire quantique discrète.

3.5.4 Lien avec les marches quantiques ouvertes

Comme dans le cadre discret, on expose le lien entre les marches quantiques ouvertes et les trajectoires quantiques continues.

Proposition 3.6. Soit $\mu^{(t)}$ la marche quantique ouverte définie dans la Proposition 3.1 et $\omega_t = \rho_t \otimes |X_t\rangle\langle X_t|$ la trajectoire quantique associée définie dans la Proposition 3.2. Alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}(\omega_t) = \mu^{(t)}.$$

De plus, pour tout $t \geq 0$, la distribution de X_t est égale à q_t .

Démonstration. La première égalité est évidente au vu du développement de Dyson (Corollaire 3.1 et Définition 3.2). Pour la deuxième partie, posons $t \geq 0$ et $i \in V$, alors

$$q_t(i) = \text{Tr}(\mu^{(t)}(I \otimes |i\rangle\langle i|)) = \mathbb{E}(\text{Tr}(\omega_t(I \otimes |i\rangle\langle i|))) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_t=i}) = \mathbb{P}(X_t = i).$$

On a prouvé que X_t a pour distribution q_t pour tout $t \geq 0$. \square

Ceci clôt la section sur les trajectoires quantiques continues. Ces trajectoires peuvent être perçues comme limites de trajectoires discrètes (voir Proposition 3.8 dans la section suivante).

3.6 Des marches quantiques ouvertes discrètes vers celles continues

Nous avons défini les marches quantiques ouvertes continues à l'aide d'un opérateur de Lindblad spécifique (voir l'équation (3.1)). Néanmoins, ces modèles ont été originellement introduits comme limite des marches quantiques ouvertes à temps discret par C.Pellegrini ([Pel14]). Nous rappelons ici les résultats de convergence qui lient les modèles discrets et continus.

On notera h le paramètre temporel qui permet de faire le lien entre les marches aléatoires à temps discret et celles à temps continu. Les conditions asymptotiques pertinentes pour obtenir des limites non triviales sont :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i \in V} \left\| \frac{A_i^i(h) - I}{h} - G_i \right\|_{\infty} = 0, \quad (3.14)$$

$$\text{et } \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i,j \in V} \left\| \frac{A_i^j(h)}{\sqrt{h}} - R_i^j \right\|_{\infty}^2 = 0. \quad (3.15)$$

Nous pouvons à présent énoncer la proposition suivante.

Proposition 3.7 ([Pel14]). Soient $\mu^{(0)}$ un état de \mathcal{K} et $\mathcal{M}(h)$ un canal quantique tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(h) : \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) \\ \mu &\mapsto \sum_{i,j \in V} B_i^j(h) \mu B_i^{j*}(h) \end{aligned} \quad (3.16)$$

où

$$B_i^j(h) = A_i^j(h) \otimes |j\rangle\langle i| \text{ avec } A_i^j(h) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j),$$

tels que $\sum_{i,j \in V} B_i^{j*}(h) B_i^j(h)$ converge fortement pour tout h strictement positif et tels que

les conditions asymptotiques (3.14) et (3.15) soient satisfaites. Alors la marche quantique ouverte discrète $\left(\mathcal{M}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor}(h)(\mu^{(0)}) \right)_{t \geq 0}$ converge, quand h tend vers zéro, vers la solution $\left(\mu^{(t)} \right)_{t \geq 0}$ de l'équation maîtresse :

$$\frac{d}{dt} \mu^{(t)} = \mathcal{L}(\mu^{(t)}), \quad (3.17)$$

où l'opérateur de Lindblad \mathcal{L} est de la forme :

$$\mathcal{L}(\mu) = G\mu + \mu G^* + \sum_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} S_i^j \mu S_i^{j*}, \quad (3.18)$$

pour tout $\mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ avec

$$\begin{aligned} G &= \sum_{i \in V} G_i \otimes |i\rangle\langle i|, \quad G_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i) \text{ pour tout } i \text{ dans } V, \\ S_i^j &= R_i^j \otimes |j\rangle\langle i|, \quad R_i^j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) \text{ pour tout } i, j \text{ distincts dans } V, \\ \text{et } G + G^* + \sum_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} S_i^{j*} S_i^j &= 0 \text{ au sens de la convergence forte.} \end{aligned}$$

Par ailleurs, les trajectoires associées aux marches quantiques continues ont été, elles aussi, construites comme limite de trajectoires quantiques discrètes. Nous étudions cet aspect dans la proposition suivante, la démonstration repose sur la convergence du générateur de Markov discret vers celui du processus continu.

Proposition 3.8 ([Pel14]). Considérons V un graphe fini. Soient $(\omega_{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor})_{t \geq 0}$ la trajectoire quantique discrète (voir Proposition 2.3) associée au canal quantique $\mathcal{M}(h)$ définie grâce à l'équation (3.16) et $(\omega_t)_{t \geq 0}$ la trajectoire quantique continue définie dans la Proposition 3.4 de lindbladien \mathcal{L} de la forme (3.18). Si les conditions asymptotiques (3.14) et (3.15) sont respectées, alors le processus $(\omega_{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor})_{t \geq 0}$ converge en loi vers $(\omega_t)_{t \geq 0}$ lorsque h tend vers zéro.

Nous avons à présent les outils nécessaires afin d'étudier les propriétés associées à la position du marcheur $(X_t)_{t \geq 0}$.

3.7 Propriétés

Le but de cette section est d'introduire, pour les marches quantiques ouvertes à temps continu, des notions généralement associées aux chaînes de Markov telles que l'irréductibilité, la transience et la récurrence. En classique, les propriétés du modèle continu se déduisent du processus aux instants de sauts. Dans notre cas, le processus aux instants de saut n'est pas forcément une marche quantique ouverte. Il est donc nécessaire de faire une étude spécifique pour obtenir des résultats sur le modèle continu. Dans cette partie, nous allons mettre en avant les différences qu'il peut exister entre les marches quantiques ouvertes discrètes et continues.

3.7.1 Irréductibilité

Contrairement au cadre discret³, la notion d'irréductibilité est équivalente à améliorer la positivité pour les modèles continus. Ces notions sont définies ci-dessous.

Définition 3.3. On dit que la marche quantique ouverte de lindbladien \mathcal{L} :

- ▶ est irréductible s'il existe t positif tel que $e^{t\mathcal{L}}$ n'admette aucune projection sous-harmonique non triviale. Rappelons qu'une projection $P \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ est dite sous-harmonique pour $e^{t\mathcal{L}}$ si $e^{t\mathcal{L}}(P\mathcal{I}_1(\mathcal{K})P) \subset P\mathcal{I}_1(\mathcal{K})P$.
- ▶ améliore la positivité s'il existe t tel que pour tout $\mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$, $e^{t\mathcal{L}}(\mu) > 0$.

3. Voir Exemple 2.3.

Le théorème ci-dessous stipule que, dans le cadre continu, l'irréductibilité et améliorer la positivité sont des notions équivalentes. De plus, il donne une nouvelle formulation de l'irréductibilité qui implique les opérateurs de transition du lindbladien.

Théorème 3.1 ([BBPP18]). *Soit $\mathcal{T} = \left(e^{t\mathcal{L}}(\cdot)\right)_{t \geq 0}$ la marche quantique ouverte, définie dans la Proposition 3.1, associée au lindbladien*

$$\mathcal{L}(\cdot) = G \cdot + \cdot G^* + \sum_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} S_i^j \cdot S_i^{j*}.$$

Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. \mathcal{T} améliore la positivité.
2. Pour tout $\varphi \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$, l'ensemble $\mathbb{C}[\mathcal{L}]\varphi$ est dense dans \mathcal{K} où $\mathbb{C}[\mathcal{L}]$ est l'ensemble des polynômes en $(e^{tG})(t \geq 0)$ et en $S_i^j (i, j \in V, i \neq j)$.
3. Pour tout $\varphi \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$, l'ensemble $\mathbb{C}[G, S]\varphi$ est dense dans \mathcal{K} où $\mathbb{C}[G, S]$ est l'ensemble des polynômes en G et en $S_i^j (i, j \in V, i \neq j)$.
4. \mathcal{T} est irréductible.

Le corollaire suivant découle immédiatement du Théorème 3.1. Il donne une définition plus trajectorielle de l'irréductibilité. Notons $\Xi_n^t(i, j)$ l'ensemble des trajectoires composées de n sauts jusqu'au temps t allant de i à j est noté

$$\Xi_n^t(i, j) = \{\xi = (i, \dots, j, t_1, \dots, t_n) \in I^{n+1} \times \mathbb{R}^n, 0 < t_1 < \dots < t_n < t\}.$$

Corollaire 3.2. Soit $\mathcal{T} = \left(e^{t\mathcal{L}}(\cdot)\right)_{t \geq 0}$ la marche quantique ouverte, définie dans la Proposition 3.1, associée au lindbladien

$$\mathcal{L}(\cdot) = G \cdot + \cdot G^* + \sum_{\substack{i,j \in V \\ i \neq j}} S_i^j \cdot S_i^{j*}.$$

Alors \mathcal{T} est irréductible si et seulement si, pour tout i et j dans V , pour tout x dans $\mathcal{H}_i \setminus \{0\}$, l'espace vectoriel engendré par

$$\{R_i^j(\xi, t)x, \xi \in \Xi_n^t(i, j), t \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$$

est dense dans \mathcal{H}_j où

$$R_i^j(\xi, t) = e^{(t-t_n)G_j} R_{i_{n-1}}^j e^{(t_n-t_{n-1})G_{i_{n-1}}} \dots e^{(t_2-t_1)G_{i_1}} R_{i_1}^{i_1} e^{t_1 G_{i_1}},$$

pour tout $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $\xi = (i, i_1, \dots, i_{n-1}, j, t_1, \dots, t_n) \in \Xi_n^t(i, j)$.

La proposition ci-dessous fournit une condition suffisante pour qu'une marche quantique ouverte soit irréductible.

Proposition 3.9. Soit $\mathcal{T} = \left(e^{t\mathcal{L}}(\cdot)\right)_{t \geq 0}$ une marche quantique ouverte de lindbladien $\mathcal{L} = K + \Phi$ où Φ est une application complètement positive et $K(\cdot) = G \cdot + \cdot G^*$ avec $G \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Si Φ est irréductible, alors \mathcal{T} est irréductible.

Démonstration. La démonstration est évidente grâce à la Proposition 2.5 et à la formulation trajectorielle de l'irréductibilité vue dans le Théorème 3.1. \square

Exemple 3.2. Nous allons illustrer le fait qu'il n'y a pas équivalence dans la Proposition 3.9. En effet, la condition " Φ est irréductible" n'est pas nécessaire pour obtenir l'irréductibilité de la marche quantique ouverte. Considérons $\mathcal{T} = \left(e^{t\mathcal{L}(\cdot)} \right)_{t \geq 0}$ une marche quantique ouverte sur $\mathcal{K} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, où la particule se déplace uniquement sur deux sites. L'opérateur de Lindblad est alors de la forme :

$$\mathcal{L}(\mu) = G\mu + \mu G^* + \Phi(\mu) \text{ où } \Phi(\mu) = S_1^2 \mu S_1^{2*} + S_2^1 \mu S_2^{1*},$$

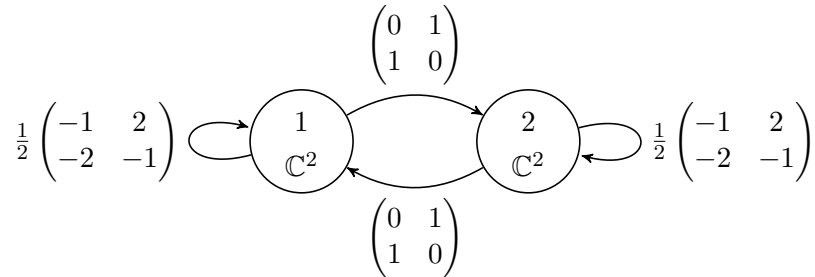
pour tout $\mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$. Plus particulièrement, considérons les opérateurs suivants :

$$G = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \otimes (|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|), \quad S_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes |2\rangle\langle 1| \text{ et } S_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes |1\rangle\langle 2|.$$

Les opérateurs ci-dessus sont bien des opérateurs de transition d'un lindbladien car l'équation

$$G + G^* + S_1^{2*} S_1^2 + S_2^{1*} S_2^1 = 0$$

est vérifiée. Le graphe associé à la position de la particule est donné ci-dessous.



On a $\mathbb{C}[G, S]\phi = \mathcal{K}$ pour tout $\phi \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$, mais

$$\mathbb{C}[S](e_1 \otimes e_1) = \text{Vect}\{e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\} \neq \mathcal{K}.$$

On vient donc de présenter un exemple où \mathcal{T} est irréductible alors que Φ ne l'est pas.

Cet exemple clôt la section sur l'irréductibilité, la suite logique est alors l'étude de la transience et de la récurrence d'une marche quantique ouverte.

3.7.2 Transience et récurrence

La transience et la récurrence sont des propriétés classiques pour les chaînes de Markov à temps continu. Elles sont des notions essentielles pour comprendre la structure globale de la chaîne. Un site $i \in V$ d'une chaîne de Markov $(Y_t)_{t \geq 0}$ est transient (resp. récurrent) si

$$\mathbb{P}_i(\{t \geq 0, Y_t = i\} \text{ borné}) = 1 \text{ (resp. } 0).$$

On peut trouver une formulation équivalente à l'aide du temps de séjour de la chaîne sur le site i :

$$n_i = \int_0^t \mathbb{1}_{Y_t=i} dt.$$

En effet, le site i est transient (resp. récurrent) si et seulement si $\mathbb{E}_i(n_i) < \infty$ (resp. $\mathbb{E}_i(n_i) = \infty$). Dans le cadre classique, ces notions peuvent être caractérisées par le premier temps d'atteinte $\tau_i = \inf\{t > T_1, Y_t = i\}$ où T_1 est le premier temps de saut. En effet, un site est transient (resp. récurrent) si $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) < 1$ (resp. $\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = 1$). Cette dernière propriété ne sera pas toujours vraie dans le cadre des marches quantiques ouvertes à temps continu.

On rappelle également qu'une chaîne de Markov irréductible voit tous ses sites être transients ou récurrents ([Nor98]). Nous avons remarqué dans la Section 2.5.2 sur le modèle discret que la dichotomie classique transience-réurrence est remplacée par une trichotomie. Cette trichotomie sera aussi vérifiée pour le modèle continu. Dorénavant, on travaillera avec des marches quantiques ouvertes semi-finies (voir Définition 2.5).

Considérons $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus défini dans la Proposition 3.4. Soit T_1 le premier temps de saut. On définit, pour tout $i \in V$,

$$\tau_i = \inf\{t \geq T_1, |X_t = i\}$$

le premier temps d'atteinte du site i pour $(X_t)_{t \geq 0}$ et

$$n_i = \int_0^\infty \mathbf{1}_{X_t=i} dt$$

le temps passé par $(X_t)_{t \geq 0}$ sur le site i . Le théorème suivant nous permet de définir les notions de transience et de récurrence pour les marches quantiques ouvertes à temps continu.

Théorème 3.2 ([BBPP18]). *Soit $\mathcal{T} = (e^{t\mathcal{L}}(\cdot))_{t \geq 0}$ une marche quantique ouverte irréductible et semi-finie. Une (et une seule) de ces situations est réalisée :*

1. la quantité $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_i)$ est finie pour tout i, j dans V et pour tout $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$;
2. la quantité $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_i)$ est infinie pour tout i, j dans V et pour tout $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$.

Définition 3.4. Une marche quantique ouverte semi-finie $\mathcal{T} = (e^{t\mathcal{L}}(\cdot))_{t \geq 0}$ est dite transiente si elle satisfait la première propriété du Théorème 3.2 et récurrente si elle satisfait la deuxième propriété.

Comme mentionné plus haut, contrairement au cas classique, on ne peut pas caractériser la récurrence ou la transience d'une marche quantique ouverte grâce aux premiers temps d'atteinte τ_i . Néanmoins, il existe une trichotomie qui permet de différencier différents cas.

Théorème 3.3 ([BBPP18]). *Soit $\mathcal{T} = (e^{t\mathcal{L}}(\cdot))_{t \geq 0}$ une marche quantique ouverte irréductible et semi-finie. Une (et une seule) de ces trois situations est réalisée :*

1. pour tout i, j dans V , pour tout ρ dans $\mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$,

$$\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) = \infty \text{ et } \mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = 1 ;$$

2. pour tout i, j dans V , pour tout ρ dans $\mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$,

$$\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) < \infty \text{ et } \mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_i < \infty) < 1 ;$$

3. pour tout i, j dans V , pour tout ρ dans $\mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$, $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) < \infty$, mais il existe i dans V et ρ, ρ' dans $\mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$ (ρ nécessairement non fidèle) tels que

$$\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_i < \infty) = 1 \text{ et } \mathbb{P}_{i,\rho'}(\tau_i < \infty) < 1 .$$

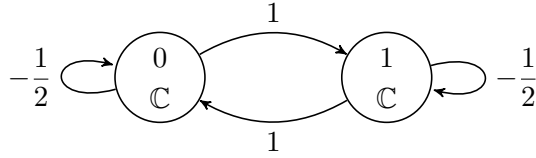
Illustrons à présent le théorème énoncé ci-dessus.

Exemple 3.3. Le n -ième exemple correspond à la n -ième situation du Théorème 3.3.

1. Pour $V = \{0, 1\}$ et $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = \mathbb{C}$, on considère la marche quantique ouverte définie par les opérateurs :

$$G_0 = G_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } R_0^1 = R_1^0 = 1 .$$

Le graphique associé est donné ci-dessous.

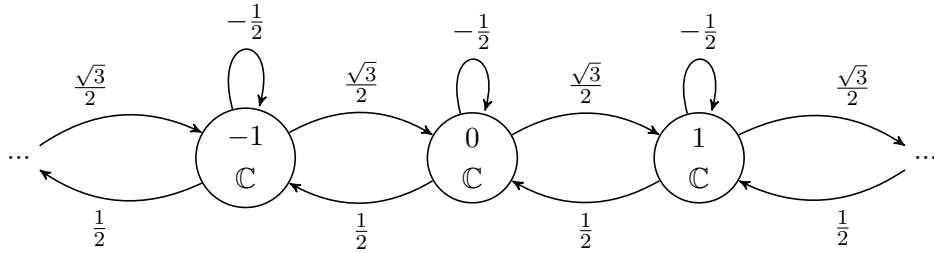


Alors le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov classique sur $\{0, 1\}$. Le marcheur stagne alors sur un site durant un laps de temps de loi exponentielle de paramètre 1, puis saute sur son site voisin et ainsi de suite.

2. Pour $V = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on considère la marche quantique ouverte définie par les opérateurs :

$$G_i = -\frac{1}{2}, R_i^{i+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, R_i^{i-1} = \frac{1}{2}, \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}.$$

Le résumé graphique de cet exemple est le suivant.



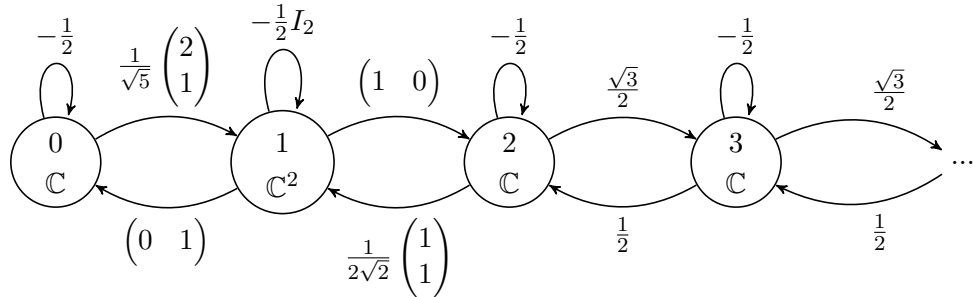
Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov classique à temps continu sur \mathbb{Z} où le marcheur ne bouge pas pendant un laps de temps de loi exponentielle de paramètre 1, puis saute à droite avec probabilité $\frac{3}{4}$ ou à gauche avec probabilité $\frac{1}{4}$.

3. La troisième situation est la plus étrange, elle n'apparaît jamais en classique. On l'illustre par une marche quantique ouverte définie sur $V = \mathbb{N}$, telle que $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^2$ et $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_i = \mathbb{C}$ pour tout $i \geq 2$, munie des opérateurs de transition suivants :

$$G_0 = -\frac{1}{2}, R_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, G_1 = -\frac{1}{2} I_2, R_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, R_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_2^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, G_i = -\frac{1}{2}, R_i^{i+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ pour } i \geq 2 \text{ et } R_i^{i-1} = \frac{1}{2} \text{ pour } i \geq 3.$$

Le résumé graphique qui suit est plus pertinent.



C'est un exemple de marche quantique ouverte irréductible où

$$\mathbb{P}_{1,\rho}(\tau_1 < \infty) = 1 \text{ pour } \rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{P}_{1,\rho'}(\tau_1 < \infty) < 1 \text{ pour } \rho' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que les marches quantiques ouvertes correspondant à des chaînes de Markov classiques (voir Section 3.2) se situent naturellement dans les deux premiers cas. Le troisième cas est celui qui diffère du cadre classique.

La preuve du Théorème 3.3 s'inspire du résultat originel en temps discret [BBP17]. L'un des points clés de la démonstration est le fait de pouvoir encadrer le temps moyen de stationner sur un site. Ce point clé constitue l'objet du lemme suivant, les autres éléments de la démonstration sont exposés dans [BBPP18].

Lemme 3.1 ([BBPP18]). *Soit $\mathcal{T} = (e^{t\mathcal{L}}(\cdot))_{t \geq 0}$ une marche quantique ouverte irréductible et semi-finie. On note T^i le temps passé sur un site $i \in V$ avant le premier saut : $T^i = \inf\{u | X_u \neq i\}$. Alors il existe des constantes strictement positives m et M telles que*

$$m \leq \mathbb{E}_{i,\rho}(T^i) \leq M,$$

pour tout $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$.

Démonstration. Calculons tout d'abord $\mathbb{P}_{i,\rho}(T^i > t)$ pour tout $t \geq 0$. Pour cela, nous aurons recours à nouveau⁴ à la solution $(\eta_t)_{t \geq 0}$ de l'équation différentielle suivante :

$$\eta_t = \rho + \int_0^t (G_i \eta_s + \eta_s G_i^* - \eta_s \text{Tr}(G_i \eta_s + \eta_s G_i^*)) ds.$$

En utilisant l'indépendance des processus de Poisson N^{ij} impliqués dans la Proposition 3.4, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{i,\rho}(T^i > t) &= \mathbb{P}_{i,\rho}(\text{"aucun saut ne se produit avant le temps } t\text{"}) \\ &= \mathbb{P}_{i,\rho}(N^{ij}(u, y | u \in [0, t], y \in [0, \text{Tr}(R_i^j \eta_u R_i^{j*})]) = 0, \forall j \neq i) \\ &= \prod_{j \neq i} \mathbb{P}_{i,\rho}(N^{ij}(u, y | u \in [0, t], y \in [0, \text{Tr}(R_i^j \eta_u R_i^{j*})]) = 0) \\ &= \prod_{j \neq i} e^{-\int_0^t \text{Tr}(R_i^j \eta_s R_i^{j*}) ds} = e^{-\sum_{j \neq i} \int_0^t \text{Tr}(R_i^j \eta_s R_i^{j*}) ds} \\ &= e^{\int_0^t \text{Tr}((G_i + G_i^*) \eta_s) ds} \end{aligned} \tag{3.19}$$

L'égalité $\mathbb{E}_{i,\rho}(T^i) = \int_0^\infty \mathbb{P}_{i,\rho}(T^i > t) dt$ permet d'obtenir la borne inférieure :

$$\mathbb{E}_{i,\rho}(T^i) \geq \frac{1}{\|G_i + G_i^*\|_\infty}.$$

Essayons à présent d'obtenir la borne supérieure.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$ tel que $G_i \rho + \rho G_i^* = 0$, alors

$$\sum_{j \in V} \text{Tr}(R_i^j \rho R_i^{j*}) = 0$$

et donc $R_i^j \rho R_i^{j*} = 0$ pour tout j dans V . Dans ce cas, $\rho \otimes |i\rangle\langle i|$ est un état invariant pour \mathcal{T} ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d'irréductibilité.

Donc $G_i \rho + \rho G_i^* \neq 0$ pour tout $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$, de plus $\text{Tr}(G_i \rho + \rho G_i^*) < 0$. Étant donné que $\mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$ est un ensemble compact, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\inf_{\rho} \text{Tr}(-(G_i + G_i^*) \rho) = \alpha.$$

4. Voir Section 3.5.2.

L'équation (3.19) permet alors d'obtenir l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}_{i,\rho}(T^i > t) = \mathbb{E}_{i,\rho} \left(e^{-\int_0^t \text{Tr}(-(G_i + G_i^*)\eta_s) ds} \right) \leq e^{-t\alpha}.$$

De la même manière que pour la borne inférieure, on obtient

$$\mathbb{E}_{i,\rho}(T^i) \leq \frac{1}{\alpha},$$

ce qui conclut la démonstration. \square

3.8 Théorèmes asymptotiques pour les marches quantiques ouvertes sur \mathbb{Z}^d

De même que pour les modèles discrets, les marches quantiques à temps continu ont des comportements asymptotiques assez classiques. Cette partie a pour but de présenter un théorème ergodique, un théorème central limite et un principe de grandes déviations pour un cas particulier de marches quantiques ouvertes à temps continu. Plus précisément, on étudie les marches quantiques ouvertes homogènes aux plus proches voisins sur \mathbb{Z}^d .

Une marche quantique ouverte homogène aux plus proches voisins sur \mathbb{Z}^d est régie par un opérateur de Lindblad \mathcal{L} de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{I}_1(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}) \\ \mu &\mapsto G\mu + \mu G^* + \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^d} S_i^j \mu S_i^{j*} \end{aligned} \quad (3.20)$$

où \mathcal{H} est un espace de Hilbert de dimension finie, $G = G_0 \otimes I$ avec $G_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et

$$\begin{aligned} S_i^j &= R_r \otimes |j\rangle\langle i| \quad \text{si } j = i + e_r \text{ où } r \in \{1, \dots, 2d\} \\ &= 0 \quad \text{sinon,} \end{aligned}$$

avec $R_r \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour tout $r \in \{1, \dots, 2d\}$ tels que

$$G_0 + G_0^* + \sum_{r=1}^{2d} R_r^* R_r = 0.$$

L'opérateur S_i^j transcrit l'idée que l'on peut passer uniquement de i à un de ses voisins $i + e_r$, et que dans ce cas, la transformation sur \mathcal{H} est régie par R_r . De plus, la forme de G spécifie que l'évolution sur l'espace d'état interne ne dépend pas de la position du marcheur et que cette évolution est dirigée par l'opérateur G_0 .

Nous donnons à présent la définition des trajectoires quantiques dans le cadre spécifique des marches quantiques ouvertes aux plus proches voisins sur \mathbb{Z}^d . Si l'état initial du système sur $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$ est

$$\mu^{(0)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho^{(0)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|,$$

alors une trajectoire quantique associée à \mathcal{L} est donnée par une chaîne de Markov $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \times \mathbb{Z}^d$ de distribution initiale :

$$\mathbb{P} \left((\rho_0, X_0) = \left(\frac{\rho^{(0)}(i)}{\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))}, i \right) \right) = \text{Tr}(\rho^{(0)}(i))$$

et vérifiant les équations différentielles stochastiques suivantes

$$\begin{aligned} d\rho_s &= \left(G_0 \rho_{s-} + \rho_{s-} G_0^* - \rho_{s-} \text{Tr}(G_0 \rho_{s-} + \rho_{s-} G_0^*) \right) ds \\ &\quad + \sum_{r=1}^{2d} \int_{y \in \mathbb{R}} \left(\frac{R_r \rho_{s-} R_r^*}{\text{Tr}(R_r \rho_{s-} R_r^*)} - \rho_{s-} \right) \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(R_r \rho_{s-} R_r^*)} N^r(dy, ds) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\text{et } dX_s = \sum_{r=1}^{2d} \int_{y \in \mathbb{R}} e_r \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(R_r \rho_{s-} R_r^*)} N^r(dy, ds),$$

où $(N^r)_{r \in \{1, \dots, 2d\}}$ sont des processus de Poisson indépendants sur \mathbb{R}^2 .

On note \mathcal{A} le générateur de Markov infinitésimal de $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ et $\mathbb{D}(\mathcal{A})$ son domaine. Pour tout $f \in \mathbb{D}(\mathcal{A})$, $\rho \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(\rho, x) &= D_\rho f(\mathcal{F}(\rho)) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{2d} \left[f \left(\frac{R_r \rho R_r^*}{\text{Tr}(R_r \rho R_r^*)}, x + e_r \right) - f(\rho, x) \right] \text{Tr}(R_r \rho R_r^*), \end{aligned} \quad (3.22)$$

où $\mathcal{F}(\rho) = G_0 \rho + \rho G_0^* - \rho \text{Tr}(G_0 \rho + \rho G_0^*)$ et $D_\rho f$ représente la différentielle partielle de f par rapport à ρ .

Remarque. Dans la suite, il n'est pas nécessaire d'expliciter exactement le domaine de \mathcal{A} . Le générateur de Markov \mathcal{A} est uniquement appliqué sur des fonctions \mathcal{C}^1 .

Remarque. Pour ce modèle particulier de marche quantique ouverte, le processus $(\rho_t)_{t \geq 0}$ est markovien. En effet, il ne dépend pas de la position de la particule $(X_t)_{t \geq 0}$. L'évolution du paramètre interne est dirigée par l'opérateur de Lindblad $\tilde{\mathcal{L}}$ suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} : \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \\ \rho &\mapsto G_0 \rho + \rho G_0^* + \sum_{r=1}^{2d} R_r \rho R_r^*. \end{aligned}$$

Cet opérateur de Lindblad joue un rôle majeur dans ce qui suit.

3.8.1 Théorème ergodique

Le résultat qui suit est tiré de l'article [KM04] de Kümmerer et Maassen, il est qualifié de *théorème ergodique*. Ce théorème est crucial dans la démonstration du Théorème 3.6.

Théorème 3.4 ([KM04]). *Soit $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ la chaîne de Markov définie grâce à l'équation (3.21), alors*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \rho_s ds \xrightarrow{p.s.} \theta_\infty.$$

où θ_∞ est une variable aléatoire à valeurs dans les invariants de $\tilde{\mathcal{L}}$ appartenant à $\mathcal{S}(\mathcal{H})$.

En particulier, si $\tilde{\mathcal{L}}$ admet un unique état invariant noté ρ_{inv} , alors la moyenne de Cesàro ci-dessus converge presque sûrement vers ρ_{inv} .

3.8.2 Théorème central limite

Cette section est dédiée au théorème central limite. Nous ne détaillons pas tous les éléments de l'article [Bri17], le lecteur peut consulter cet article dans la suite du manuscrit. Néanmoins, nous indiquons la structure de la démarche. Afin d'obtenir un théorème central limite pour la position du marcheur (Théorème 3.6), le processus étudié est décomposé en deux parties : une martingale et un processus borné. L'équation de Poisson (Lemmes 3.2 et 3.3) permet d'obtenir cette décomposition. Le processus borné n'ayant pas d'influence asymptotiquement, il suffit d'obtenir un théorème central limite pour la martingale afin d'atteindre notre but. La fin de la démonstration consiste donc à vérifier si cette martingale vérifie les hypothèses du théorème central limite pour les martingales (Théorème 3.5). Tout d'abord, énonçons le premier lemme associé à l'équation de Poisson.

Lemme 3.2 ([Bri17]). *Supposons que $\tilde{\mathcal{L}}$ admette un unique état invariant noté ρ_{inv} . Posons*

$$\alpha = \sum_{r=1}^{2d} \text{Tr}(R_r \rho_{inv} R_r^*) e_r.$$

Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, l'équation

$$\tilde{\mathcal{L}}^*(J_u) = - \left(\sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) R_r^* R_r - (\alpha \cdot u) I \right) \quad (3.23)$$

admet une solution et la différence de deux solutions quelconques de (3.23) est un multiple de l'identité.

On notera par la suite J_u la solution de (3.23) telle que $\text{Tr}(J_u) = 0$. De plus, si $u = e_r$, alors on note plus simplement $J_u = J_r$. On remarque que

$$J_u = \sum_{r=1}^d u_r J_r.$$

Le Lemme 3.2 permet d'obtenir une solution de l'équation de Poisson. Cette solution est explicitée dans le lemme suivant.

Lemme 3.3 ([Bri17]). *Pour tout $(\rho, x) \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \times \mathbb{Z}^d$ et $u \in \mathbb{R}^d$, posons*

$$f_u(\rho, x) = \text{Tr}(\rho J_u) + x \cdot u. \quad (3.24)$$

Alors f_u est solution de l'équation de Poisson :

$$\mathcal{A}f_u(\rho, x) = \alpha \cdot u. \quad (3.25)$$

Avant d'énoncer le théorème central limite pour les martingales à temps continu, nous rappelons quelques notations pour une martingale $(M_t)_{t \geq 0}$ càdlàg de carré intégrable. On note $\Delta M_t = M_t - M_{t-}$,

$$[M]_t = M_t^2 - M_0^2 - 2 \int_0^t X_{s-} dX_s$$

et $\langle M \rangle_t$ l'unique processus croissant prévisible défini par le théorème de décomposition de Doob ([JS13]) tel que $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ soit une martingale par rapport à la filtration associée à $(M_t)_{t \geq 0}$. Ces trois quantités vérifient la relation suivante :

$$[M]_t = \langle M \rangle_t + \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2.$$

Le lecteur pourra consulter [JS13] afin d'obtenir plus de détails sur la théorie des martingales. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème central limite pour les martingales à temps continu qui est fondamental dans la démonstration du Théorème 3.6.

Théorème 3.5 ([CP05]). Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale réelle, centrée et de carré intégrable pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Si les convergences en probabilité suivantes sont vérifiées :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \sup_{0 \leq s \leq t} |\Delta M_s| \right) = 0 \quad (3.26)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[M]_t}{t} = \sigma^2 \quad (3.27)$$

pour un certain $\sigma \geq 0$, alors :

$$\frac{M_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Nous pouvons à présent formuler le théorème central limite, élément principal de cette partie.

Théorème 3.6 ([Bri17]). Soit $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ la chaîne de Markov définie grâce à l'équation (3.21). Supposons que $\tilde{\mathcal{L}}$ admette un unique état invariant noté ρ_{inv} , alors

$$\frac{X_t - \alpha t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V),$$

où

$$\alpha = \sum_{r=1}^{2d} \text{Tr}(R_r \rho_{inv} R_r^*) e_r$$

et $V \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que pour tout $r, q \in \{1, \dots, d\}$,

$$\begin{aligned} V_{rq} = & -\alpha_q \text{Tr}(\rho_{inv} J_r) - \alpha_r \text{Tr}(\rho_{inv} J_q) \\ & + \delta_{rq} (\text{Tr}(R_r \rho_{inv} R_r^*) + \text{Tr}(R_{r+d} \rho_{inv} R_{r+d}^*)) \\ & + \text{Tr}(R_q \rho_{inv} R_q^* J_r) + \text{Tr}(R_r \rho_{inv} R_r^* J_q) \\ & - \text{Tr}(R_{q+d} \rho_{inv} R_{q+d}^* J_r) - \text{Tr}(R_{r+d} \rho_{inv} R_{r+d}^* J_q). \end{aligned}$$

Démonstration. L'intégralité de la démonstration se trouve dans l'article [Bri17], néanmoins nous présentons ci-dessous les grandes lignes de la preuve. Dans un premier temps, on fixe $u \in \mathbb{R}^d$ et grâce au Lemme 3.2, il existe $f_u : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{A}f_u(\rho, x) = \alpha \cdot u.$$

Le générateur infinitésimal \mathcal{A} étant celui du processus de Markov $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$, le processus $(M_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$\begin{aligned} M_t &= f_u(\rho_t, X_t) - f_u(\rho_0, X_0) - \int_0^t \mathcal{A}f_u(\rho_{s-}, X_{s-}) ds \\ &= (X_t - \alpha t) \cdot u + \text{Tr}(\rho_t J_u) - \text{Tr}(\rho_0 J_u) - X_0 \cdot u \end{aligned}$$

est une martingale locale par rapport à la filtration associée au processus $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ (pour plus de détails sur les problèmes de martingales, voir [EK86, RY99]).

Dans l'optique d'appliquer le Théorème 3.5, nous devons justifier que $(M_t)_{t \geq 0}$ est une vraie martingale. Pour cela, il suffit⁵ de prouver la condition suivante

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s| \right) < \infty.$$

5. Voir [EK86].

Cette condition a été vérifiée dans [Bri17], donc $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale.

La première condition (équation (3.26)) du théorème central limite pour les martingales est aisément vérifiable car la taille maximale des sauts de $(M_t)_{t \geq 0}$ est bornée. La seconde condition (équation (3.27)) demande, quant à elle, beaucoup plus de travail. Elle est toutefois vérifiée, donc $(M_t)_{t \geq 0}$ satisfait un théorème central limite.

Le théorème central limite pour $(X_t - \alpha t)$ découle alors de celui pour $(M_t)_{t \geq 0}$ car

$$\left(\text{Tr}(\rho_t J_u) - \text{Tr}(\rho_0 J_u) - X_0 \cdot u \right)$$

est borné, et ce indépendamment de t . □

Terminons cette partie en illustrant le Théorème 3.6 grâce à l'Exemple 3.1 vu en amont.

Exemple 3.4. On considère la marche quantique ouverte sur \mathbb{Z} définie par l'équation (3.20), où $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}^2$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$G_0 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que cet exemple vérifie l'hypothèse du Théorème 3.6 avec

$$\rho_{inv} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}; \alpha = -\frac{1}{10}; J = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; V = \frac{73}{125}.$$

Le Théorème 3.6 stipule donc que

$$\frac{X_t + \frac{t}{10}}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{73}{125}\right).$$

Cette convergence explique donc les distributions observées via les simulations numériques (voir Exemple 3.1).

3.8.3 Principe de grandes déviations

Nous allons maintenant présenter un principe de grandes déviations pour les marches quantiques ouvertes à temps continu (voir [Bri17]). Le lecteur peut consulter [DZ10] pour le principe de grandes déviations dans le cadre des chaînes de Markov classiques. C'est en s'inspirant de la démarche classique que nous avons réussi à obtenir un principe de grandes déviations pour nos modèles (Théorème 3.8). De façon informelle, l'étude spectrale du générateur déformé (Lemme 3.4) permet d'obtenir le résultat souhaité à l'aide du théorème de Gärtner-Ellis (Théorème 3.7). Détaillons plus en profondeur l'approche adoptée dans [Bri17] pour obtenir le principe de grandes déviations.

Afin de prouver le principe de grandes déviations, il est nécessaire d'introduire un opérateur de Lindblad déformé. Pour cela, on définit pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ et $r \in \{1, \dots, 2d\}$ les opérateurs

$$R_r^{(u)} = e^{\frac{u \cdot e_r}{2}} R_r.$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on note $\tilde{\mathcal{L}}_u$ le lindbladien associé aux opérateurs déformés $R_r^{(u)}$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_u : \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \\ \rho &\mapsto G_0 \rho + \rho G_0^* + \sum_{r=1}^{2d} e^{u \cdot e_r} R_r \rho R_r^*. \end{aligned}$$

Nous énonçons ci-dessous la définition trajectorielle d'irréductibilité⁶ pour un lindbladien associé à une marche quantique ouverte semi-finie aux plus proches voisins sur \mathbb{Z}^d .

Proposition 3.10. Soit \mathcal{Z} un opérateur de Lindblad tel que

$$\mathcal{Z} = G_0 \cdot + \cdot G_0 + \sum_{r=1}^{2d} R_r \cdot R_r^*.$$

Alors \mathcal{Z} est irréductible si et seulement si pour tout x non nul dans \mathcal{H} l'ensemble $\mathbb{C}[G_0, R_r]x$ est égal à \mathcal{H} , où $\mathbb{C}[G_0, R_r]$ est l'ensemble des polynômes en G_0 et en R_r .

Les deux prochains lemmes sont des éléments charnières de la démonstration du principe de grandes déviations. Plus précisément, le prochain lemme donne des informations sur la plus grande partie réelle des valeurs propres du semi-groupe de Lindblad déformé $\{e^{t\tilde{\mathcal{L}}_u}\}_{t \geq 0}$.

Lemme 3.4 ([Bri17, JPW14]). *Supposons que $\tilde{\mathcal{L}}$ soit irréductible. Posons*

$$l_u = \max\{\operatorname{Re}(\lambda), \lambda \in \operatorname{Sp}(\tilde{\mathcal{L}}_u)\}.$$

Alors pour tout $t \geq 0$, la quantité e^{tl_u} est une valeur propre algébriquement simple de $e^{t\tilde{\mathcal{L}}_u}$, et le vecteur propre normé associé v_u est un état strictement positif de \mathcal{H} . De plus, l'application $u \mapsto l_u$ peut être prolongée analytiquement sur un voisinage de \mathbb{R}^d .

Le prochain lemme décrit le lien entre la fonction génératrice des moments de $X_t - X_0$ et le semi-groupe de Lindblad déformé $\{e^{t\tilde{\mathcal{L}}_u}\}_{t \geq 0}$.

Lemme 3.5 ([Bri17]). *Soit $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ la trajectoire quantique définie via l'équation (3.21). Pour tout $t \geq 0$ et tout $u \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\mathbb{E}\left(e^{u \cdot (X_t - X_0)}\right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \operatorname{Tr}\left(e^{t\tilde{\mathcal{L}}_u}(\rho^{(0)}(i))\right).$$

La version discrète du théorème de Gärtner-Ellis a déjà été énoncée dans le Théorème 2.6. Nous énonçons ci-dessous la version continue qui est cruciale dans la démonstration du Théorème 3.8.

Théorème 3.7 (Gärtner-Ellis [DZ10]). *Soit $(Z_t)_{t \geq 0}$ une famille de variables aléatoires sur \mathbb{R}^d . Notons $\Lambda_t : u \mapsto \log\left(\mathbb{E}\left(e^{u \cdot Z_t}\right)\right)$ le logarithme de la fonction génératrice des moments de Z_t pour tout $t \geq 0$. S'il existe une fonction $\Lambda : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ différentiable telle que, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \Lambda_t(tu) = \Lambda(u),$$

alors $(Z_t)_{t \geq 0}$ admet un principe de grandes déviations associé à la bonne fonction de taux :

$$\Lambda^* : x \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}^d} (u \cdot x - \Lambda(u)).$$

Explicitement, cela signifie que pour tout ensemble ouvert G et tout ensemble fermé F tels que $G \subset F \subset \mathbb{R}^d$,

$$-\inf_{x \in G} \Lambda^*(x) \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}(Z_t \in G) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}(Z_t \in F) \leq -\inf_{x \in F} \Lambda^*(x).$$

On peut à présent énoncer le théorème principal de cette section.

6. Voir Corollaire 2.1 pour le cadre général.

Théorème 3.8 ([Bri17]). Soit $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ la trajectoire quantique définie via l'équation (3.21). Si $\tilde{\mathcal{L}}$ est irréductible, alors $\left(\frac{X_t - X_0}{t}\right)_{t \geq 0}$ admet un principe de grandes déviations associé à la bonne fonction de taux :

$$\Lambda^* : x \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}^d} (u \cdot x - l_u)$$

Explicitement, cela signifie que pour tout ensemble ouvert G et tout ensemble fermé F tels que $G \subset F \subset \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} - \inf_{x \in G} \Lambda^*(x) &\leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P} \left(\frac{X_t - X_0}{t} \in G \right) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P} \left(\frac{X_t - X_0}{t} \in F \right) \leq - \inf_{x \in F} \Lambda^*(x). \end{aligned}$$

Remarque. De plus, si $\mathbb{E}(e^{u \cdot X_0}) < \infty$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, alors le principe de grandes déviations est encore valable pour X_t à la place de $X_t - X_0$.

Démonstration. La démonstration consiste à encadrer la fonction génératrice des moments de $X_t - X_0$ afin d'utiliser le Théorème 3.7. Soit $u \in \mathbb{R}^d$, l'irréductibilité de $\tilde{\mathcal{L}}$ engendre celle de $\tilde{\mathcal{L}}_u$ (trivial grâce à la Proposition 3.10) et donc $\tilde{\mathcal{L}}_u$ améliore la positivité d'après le Théorème 3.1. Soit $t > 0$ et $0 < \epsilon < t$, on a donc

$$e^{\epsilon \tilde{\mathcal{L}}_u(\rho^{(0)}(i))} > 0,$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$. D'après le Lemme 3.4, il existe un état fidèle v_u tel que $e^{(t-\epsilon)\tilde{\mathcal{L}}_u}(v_u) = e^{(t-\epsilon)l_u}v_u$. Posons

$$r_{u,i} = \inf \left(\text{Sp} \left[e^{\epsilon \tilde{\mathcal{L}}_u(\rho^{(0)}(i))} \right] \right)$$

et

$$s_{u,i} = \frac{\text{Tr} \left(e^{\epsilon \tilde{\mathcal{L}}_u(\rho^{(0)}(i))} \right)}{\inf \text{Sp}(v_u)},$$

de sorte que

$$r_{u,i}v_u \leq e^{\epsilon \tilde{\mathcal{L}}_u(\rho^{(0)}(i))} \leq s_{u,i}v_u.$$

En appliquant $e^{(t-\epsilon)\tilde{\mathcal{L}}_u}$, on obtient

$$r_{u,i}e^{(t-\epsilon)l_u}v_u \leq e^{\tilde{\mathcal{L}}_u(\rho^{(0)}(i))} \leq s_{u,i}e^{(t-\epsilon)l_u}v_u.$$

En prenant la trace de l'inégalité ci-dessus, le Lemme 3.5 fournit l'inégalité suivante :

$$e^{(t-\epsilon)l_u} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} r_{u,i} \leq \mathbb{E}(e^{u \cdot (X_t - X_0)}) \leq e^{(t-\epsilon)l_u} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} s_{u,i}.$$

Les sommes ci-dessus sont finies et strictement positives, on obtient donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left(\mathbb{E}(e^{u \cdot (X_t - X_0)}) \right) = l_u.$$

On pose $\Lambda_t : u \mapsto \log \left(\mathbb{E} \left(e^{u \cdot \frac{X_t - X_0}{t}} \right) \right)$ le logarithme de la fonction génératrice des moments de $\frac{X_t - X_0}{t}$ et $\Lambda : u \mapsto l_u$. Nous venons de montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \Lambda_t(tu) = \Lambda(u).$$

Comme Λ est une fonction analytique (Lemma 3.4), les conditions du théorème de Gärtner-Ellis (3.7) sont vérifiées. On obtient alors le principe de grandes déviations attendu avec

$$\Lambda^* : x \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}^d} (u \cdot x - l_u).$$

□

Illustrons le théorème ci-dessus par l'Exemple 3.1 vu en amont.

Exemple 3.5. On considère la marche quantique ouverte sur \mathbb{Z} définie par l'équation (3.20), où $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}^2$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

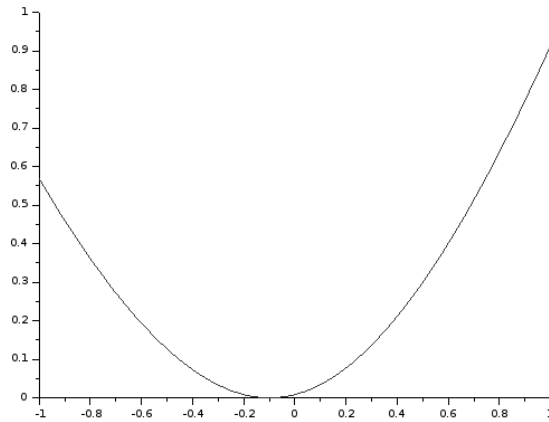
$$G_0 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le lecteur peut facilement vérifier que l'opérateur de Lindblad est irréductible grâce à la caractérisation vue en Proposition 3.10. Par conséquent, le processus $\left(\frac{X_t - X_0}{t}\right)_{t \geq 0}$ satisfait un principe de grandes déviations associé à la bonne fonction de taux $\Lambda^* : x \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}} (u \cdot x - l_u)$.

Dans cet exemple, on est capable de calculer $l_u = \max\{\Re(\lambda), \lambda \in \text{Sp}(\tilde{\mathcal{L}}_u)\}$. En effet, grâce à la décomposition de $\tilde{\mathcal{L}}_u$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(u)} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 2(e^u + e^{-u}) \\ 0 & -5 & 2(e^u + \sqrt{2}e^{-u}) & 0 \\ 0 & 2(e^u + \sqrt{2}e^{-u}) & -5 & 0 \\ 2(e^u + 2e^{-u}) & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

on obtient suite à des calculs fastidieux $l_u = \frac{1}{32} \left(20 + \sqrt{208 + 64e^{2u} + 128e^{-2u}} \right)$. La figure ci-dessous représente la bonne fonction de taux Λ^* .



Ceci conclut la section sur les théorèmes asymptotiques.

Chapitre 4

Perspectives

Sommaire

4.1	Problème de Dirichlet	75
4.2	Mesures quantiques non destructives	77

Ce chapitre est composé de deux sous parties qui exposent des pistes de recherche et des résultats partiels. La première section traite du problème de Dirichlet pour les marches quantiques ouvertes à temps continu alors que la deuxième expose des résultats asymptotiques sur les mesures quantiques non destructives. Ces deux sections sont très distinctes et font l'objet de travaux en cours avec différents collaborateurs.

4.1 Problème de Dirichlet

Nous présentons ici un travail en cours sur le problème de Dirichlet pour les marches quantiques ouvertes à temps continu. Le problème de Dirichlet classique permet en particulier de calculer les probabilités d'atteintes d'une chaîne de Markov. Nous exposons brièvement quelques résultats, sans rentrer profondément dans les détails. Le problème de Dirichlet pour les marches quantiques ouvertes à temps discret a déjà été traité dans [BBP17].

Replaçons-nous dans le cadre classique; soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov à temps continu sur V de matrice de taux de transition $Q = (q_{ij})_{i,j \in V}$. On note

$$\tau_A = \inf\{t \geq 0, |Y_t \in A\}$$

le temps d'atteinte de la chaîne pour le domaine $A \subset V$. Le but est à présent de calculer les quantités

$$h_i^A = \mathbb{P}_i(\tau_A < \infty)$$

où $i \in V$. Ces quantités sont solutions du problème dit de Dirichlet :

$$\begin{cases} h_i^A = 1 \text{ si } i \in A, \\ \sum_{j \in V} q_{ij} h_j^A = 0 \text{ si } i \notin A. \end{cases}$$

Ces équations sont pratiques car leur résolution permet de calculer les probabilités de temps d'atteintes $(h_i^A)_{i \in V}$ pour tout $A \subset V$.

Plaçons-nous à présent dans le cadre quantique, et plus précisément dans le cadre de la Section 3.1. Soit $(\mu^{(t)})_{t \geq 0}$ une marche quantique ouverte de lindbladien \mathcal{L} . On suppose

dans toute cette partie que cette marche admet un unique état invariant fidèle de $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ que l'on note σ . On définit sur $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ le produit scalaire suivant :

$$\langle X, Y \rangle_\sigma = \text{Tr} \left[\sigma^{1/2} X^* \sigma^{1/2} Y \right], \quad \text{où } X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{K}). \quad (4.1)$$

Ce produit scalaire permet en particulier de définir la forme de Dirichlet pour notre processus.

Définition 4.1. La *forme de Dirichlet* associée à la marche quantique ouverte irréductible de lindbladien \mathcal{L} est la forme quadratique suivante :

$$\mathcal{E}(X, Y) = -\langle X, \mathcal{L}^*(Y) \rangle_\sigma = -\text{Tr} \left[\sigma^{1/2} X^* \sigma^{1/2} \mathcal{L}^*(Y) \right], \quad \text{où } X \in \mathcal{B}(\mathcal{K}). \quad (4.2)$$

On note $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X, X)$ et $\mathcal{E}_\alpha(X) = \mathcal{E}(X) + \alpha \|X\|_\sigma^2$ pour tout α positif et $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$.

On suppose dorénavant que \mathcal{L} vérifie la condition de balance détaillée (CBD) par rapport à σ , c'est à dire que \mathcal{L}^* est auto-adjoint pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_\sigma$. Notons que cette condition entraîne la positivité de \mathcal{E} .

Le théorème suivant expose la résolution du problème de Dirichlet pour les marches quantiques ouvertes à temps continu.

Théorème 4.1. Soient \mathcal{L} un lindbladien, α un réel positif et A un ensemble non vide de V . Alors, il existe une unique solution $H_\alpha^A \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ au problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} X = I_{\mathcal{K}_A} \text{ sur } A, \\ (\alpha I - \mathcal{L}^*)(X) = 0_{\mathcal{K}_{V \setminus A}} \text{ sur } V \setminus A, \end{cases} \quad (\text{qD}_\alpha^A)$$

où $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. De plus, H_α^A est l'unique minimiseur sur $I_{\mathcal{K}_A} + \mathcal{B}(\mathcal{K}_{V \setminus A})$ de la forme de Dirichlet \mathcal{E}_α , c'est-à-dire

$$\mathcal{E}_\alpha(H_\alpha^A) = \inf_{X \in I_{\mathcal{K}_A} + \mathcal{B}(\mathcal{K}_{V \setminus A})} \mathcal{E}_\alpha(X). \quad (4.3)$$

Le résultat précédent est une conséquence du théorème de Lax-Milgram¹. Étudions à présent le lien entre la solution du problème de Dirichlet et le premier temps d'atteinte τ_A pour la trajectoire quantique $(X_t)_{t \geq 0}$.

Théorème 4.2. Soit H_α^A l'unique solution du problème de Dirichlet (qD_α^A) . Alors, pour tout $i \in V$ et $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$, on a :

$$\text{Tr} \left[(\rho \otimes |i\rangle\langle i|) H_\alpha^A \right] = \mathbb{E}_{i, \rho}(e^{-\alpha \tau_A}). \quad (4.4)$$

Remarque. Notons que ce théorème permet d'obtenir la fonction caractéristique de τ_A . La solution du problème de Dirichlet nous donne par conséquent la loi de τ_A .

Le point clé de la démonstration (Lemme 4.1) est la correspondance entre le problème de Dirichlet (qD_α^A) et le problème de Dirichlet classique lié à la trajectoire quantique associée à la marche quantique ouverte :

$$\begin{cases} f(\rho, i) = 1 & \text{pour tout } i \in A, \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_i), \\ (\alpha I - \mathcal{A}) f(\rho, i) = 0 & \text{pour tout } i \in V \setminus A, \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_i), \end{cases} \quad (\text{cD}_\alpha^A)$$

où l'inconnue $f \in \mathbb{D}(\mathcal{A})$ avec \mathcal{A} le générateur de Markov infinitésimal de $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ (voir Section 3.5.2).

1. Voir [BCL99] pour une démonstration.

Lemme 4.1. *L'opérateur H_α^A est solution du problème de Dirichlet (qD_α^A) si et seulement si $h_\alpha^A \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ est solution du problème de Dirichlet (cD_α^A), où*

$$h_\alpha^A(\rho, i) = \text{Tr} \left[(\rho \otimes |i\rangle\langle i|) H_\alpha^A \right], \quad (4.5)$$

pour tout i dans V et ρ dans $\mathcal{S}(\mathcal{H}_i)$.

Ces résultats sont issus d'un travail en cours avec différents collaborateurs.

4.2 Mesures quantiques non destructives

Nous étudions à présent les propriétés asymptotiques liées aux modèles de mesures quantiques non destructives. Ces modèles sont décorrélés de ceux présentés jusqu'à présent, ils s'inscrivent néanmoins dans le cadre des systèmes quantiques ouverts. Les mesures quantiques non destructives ont été popularisées par des expériences concrètes [Har03] où le nombre de photons dans une cavité a été mesuré sans détruire cette cavité. Le cadre physique auquel nous nous intéressons est constitué d'un système quantique \mathcal{S} subissant une succession de mesures indirectes. Plus précisément, le système \mathcal{S} interagit avec une chaîne infinie de systèmes auxiliaires identiques et indépendants de sorte que suite à chaque interaction entre \mathcal{S} et une partie du système auxiliaire (appelée sonde), une mesure est effectuée sur la sonde. Concernant le modèle spécifique des mesures de non-démolition quantique, les premiers résultats de convergence ont été obtenus dans [BB11] et une généralisation complète est fournie dans [BBB13]. En particulier, une estimation précise de la stabilité a été établie.

Présentons brièvement le cadre mathématique. Le système \mathcal{S} est décrit par un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\mathcal{S}$ muni d'une base orthonormale $\{|\alpha\rangle, \alpha \in \mathcal{A}\}$ dont les éléments sont appelés les états pointeurs. Soit $q_n(\cdot)$ la distribution sur les états pointeurs de l'état de $\mathcal{H}_\mathcal{S}$ après n interactions et n mesures. Dans [BBB13], il a été prouvé, sous une condition de non-dégénérescence, que la séquence de distribution ($q_n(\cdot)$) converge vers une distribution $\delta_\Gamma(\cdot)$ où Γ est une variable aléatoire distribuée sur les états pointeurs $\{|\alpha\rangle, \alpha \in \mathcal{A}\}$. De plus, la distribution de Γ reproduit la mesure associée à la réduction du paquet d'onde qui aurait eu lieu si une mesure directe avait été effectuée initialement sur \mathcal{S} . Dans [BBB13], un résultat plus précis est démontré en utilisant des techniques de martingales et en conditionnant la valeur de l'état final Γ . En particulier, les auteurs de cet article obtiennent une loi des grands nombres de la forme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{q_n(\alpha)}{q_n(\Gamma)} \right) = S(\Gamma, \alpha)$$

pour une entropie explicite S . Un tel résultat est généralement affiné par un théorème limite central qui permet de spécifier la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres.

Dans cette optique, on s'intéresse à un théorème central limite pour les mesures quantiques non destructives (Théorème 4.5). On s'intéresse également à des estimations de Berry-Esseen (Théorème 4.6) qui permettent de donner une estimation de la vitesse de convergence dans le théorème central limite. En particulier, cela pourrait permettre de développer un test d'hypothèses sur les états pointeurs, et ainsi d'obtenir de l'information sur l'état du système \mathcal{S} . De multiples tests statistiques pour les mesures quantiques non destructives ont déjà été étudiés dans la littérature [BGP18, SCIB⁺15].

4.2.1 Modèle

Dans cette partie, nous décrivons le modèle et les objets associés aux mesures non destructives. Notre système quantique est décrit par \mathcal{H}_S que l'on munit d'une base orthonormale $\text{Vect}_{\alpha \in \mathcal{A}}(|\alpha\rangle)$. Le système est en interaction avec une suite infinie de systèmes quantiques donnée par

$$\bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k,$$

où $\mathcal{H}_k = \mathcal{H} = \text{Vect}_{i \in \mathcal{I}}(|i\rangle)$ pour tout $k \geq 1$, avec \mathcal{H} un espace de Hilbert de dimension finie.

Commençons par décrire la première interaction entre \mathcal{H}_S et la première copie $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$. Considérons $\phi_0 \in \mathcal{H}_S$ (représentant l'état initial du système) et $\psi \in \mathcal{H}$ (représentant l'état de la sonde), alors l'état du système bipartite, avant l'interaction, est $\phi_0 \otimes \psi$. Le but de la mesure indirecte est d'acquérir des informations sur \mathcal{H}_S et notamment sur la distribution de ϕ_0 le long des états pointeurs. En particulier,

$$\phi_0 = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \phi_0, \alpha \rangle |\alpha\rangle$$

et donc la distribution $(q_0(\alpha))_{\alpha \in \mathcal{A}}$ associée à la mesure de ϕ_0 le long des états pointeurs est définie par

$$q_0(\alpha) = |\langle \phi_0, \alpha \rangle|^2,$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$.

Nous considérons une interaction usuelle pour les mesures quantiques non destructives régie par l'opérateur unitaire :

$$U = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes U_\alpha,$$

où $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ est une famille d'opérateurs unitaires sur \mathcal{H} . Après l'interaction, l'état du système $\phi_0 \otimes \psi$ devient

$$U(\phi_0 \otimes \psi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle \phi_0, \alpha \rangle \langle U_\alpha \psi, i \rangle |\alpha\rangle \otimes |i\rangle.$$

Notons que si $\phi_0 = |\alpha\rangle$ pour un certain α , alors

$$U(\phi_0 \otimes \psi) = |\alpha\rangle \otimes U_\alpha \psi.$$

C'est une caractéristique spécifique des mesures quantiques non destructives. En particulier, si on prépare préalablement notre système dans un état pointeur, alors l'interaction avec le système auxiliaire ne transforme pas le système d'étude.

On considère à présent une mesure indirecte le long de la base $\{|i\rangle\}_{i \in \mathcal{I}}$. Commençons par un cas particulier où l'état initial du système est $\phi_0 = |\alpha\rangle$. Dans ce cas, on note $\pi(i|\alpha)$ la probabilité d'observer l'état $|i\rangle$, c'est-à-dire

$$\pi(i|\alpha) = \mathbb{P}[\text{"observer } i\text{"}] = |\langle i, U_\alpha \psi \rangle|^2.$$

Dans le cas général, la probabilité d'observer $|i\rangle$ est

$$\begin{aligned} \pi_0(i) &= \sum_{\beta \in \mathcal{A}} |\langle \phi_0, \beta \rangle|^2 |\langle U_\beta \psi, i \rangle|^2 \\ &= \sum_{\beta \in \mathcal{A}} q_0(\beta) \pi(i|\beta). \end{aligned}$$

La réduction du paquet d'onde nous informe alors que l'observation de $|i\rangle$ projette l'état du système sur

$$\frac{\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \phi_0, \alpha \rangle \langle U_\alpha \psi, i \rangle |\alpha\rangle}{\left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \phi_0, \alpha \rangle \langle U_\alpha \psi, i \rangle |\alpha\rangle \right\|} \otimes |i\rangle.$$

Suite à l'observation de $|i\rangle$, le système sur \mathcal{H}_S devient

$$\phi_1 = \frac{\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \phi_0, \alpha \rangle \langle U_\alpha \psi, i \rangle |\alpha\rangle}{\left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \phi_0, \alpha \rangle \langle U_\alpha \psi, i \rangle |\alpha\rangle \right\|} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{\langle \phi_0, \alpha \rangle \langle U_\alpha \psi, i \rangle}{\sqrt{\pi_0(i)}} |\alpha\rangle.$$

Notons que si $\phi_0 = |\alpha\rangle$, alors on a toujours $\phi_1 = |\alpha\rangle$.

Si le résultat de la mesure sur le système auxiliaire est $i \in \mathcal{I}$, alors la probabilité que le système soit en $|\alpha\rangle$ est

$$q_1(\alpha) = |\langle \phi_0, \alpha \rangle|^2 \frac{|\langle U_\alpha \psi, i \rangle|^2}{\pi_0(i)} = q_0(\alpha) \frac{\pi(i|\alpha)}{\pi_0(i)}.$$

Le vecteur $q_1(\cdot)$ décrit la distribution le long des états pointeurs de ϕ_1 suite à l'observation de $i \in \mathcal{I}$.

On itère ensuite la manipulation en faisant interagir une deuxième sonde \mathcal{H}_2 dans l'état ψ avec \mathcal{H}_S , et ainsi de suite. L'évolution du système \mathcal{H}_S est décrite par une suite aléatoire d'états $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\phi_{n+1} = \frac{\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \phi_n, \alpha \rangle \langle U_\alpha \psi, i \rangle |\alpha\rangle}{\left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \phi_n, \alpha \rangle \langle U_\alpha \psi, i \rangle |\alpha\rangle \right\|},$$

avec probabilité

$$\pi_n(i) = \sum_{\beta \in \mathcal{A}} q_n(\beta) \pi(i|\beta),$$

où $q_n(\beta) = |\langle \phi_n, \beta \rangle|^2$, pour tout $\beta \in \mathcal{A}$. La suite de distributions aléatoires $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathcal{A} satisfait donc

$$q_{n+1}(\alpha) = q_n(\alpha) \frac{\pi(i|\alpha)}{\pi_n(i)} \text{ avec probabilité } \pi_n(i) = \sum_{\beta \in \mathcal{A}} q_n(\beta) \pi(i|\beta).$$

En particulier, si les n premiers résultats des mesures successives sont (i_1, \dots, i_n) , alors

$$q_n(\alpha) = q_0(\alpha) \frac{\prod_{k=1}^n \pi(i_k|\alpha)}{\sum_{\beta \in \mathcal{A}} q_0(\beta) \prod_{k=1}^n \pi(i_k|\beta)},$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$.

Définissons à présent l'espace de probabilité sur lequel on travaille. Posons tout d'abord $\Omega = \mathcal{I}^{\mathbb{N}}$ que l'on munit de l'algèbre cylindrique. Plus précisément, on note

$$\Lambda_{i_1, \dots, i_n} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = i_1, \dots, \omega_n = i_n\}$$

un cylindre de taille n et \mathcal{F}_n la σ -algèbre engendrée par l'ensemble des cylindres de taille n . La tribu cylindrique est alors la σ -algèbre engendrée par tous les \mathcal{F}_n . On définit alors une mesure de probabilité \mathbb{P} sur les cylindres de taille n de sorte que

$$\mathbb{P}[\omega \in \Omega \mid \omega_1 = i_1, \dots, \omega_n = i_n] = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} q_0(\alpha) \prod_{k=1}^n \pi(i_k \mid \alpha).$$

La mesure définie ci-dessus s'étend en une unique mesure, que l'on note encore \mathbb{P} sur la tribu cylindrique grâce au théorème d'extension de Carathéodory². Notons que $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_n, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré.

On note $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de variables aléatoires décrivant les résultats des mesures successives, alors $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ et

$$\mathbb{P}[X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n] = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} q_0(\alpha) \prod_{k=1}^n \pi(i_k \mid \alpha). \quad (4.6)$$

Le but est maintenant d'étudier le comportement asymptotique de $q_n(\cdot)$, où $q_n(\cdot)$ représente la distribution résultant de la réduction du paquet d'onde lorsqu'une mesure est effectuée sur \mathcal{S} suite aux n mesures successives. Énonçons un premier résultat.

Théorème 4.3 ([BBB13]). *La suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une \mathcal{F}_n martingale qui converge presque sûrement et dans L^1 vers une variable aléatoire q_∞ .*

De plus, si

$$\forall \alpha \neq \beta \in \mathcal{A}, \exists i \in \mathcal{I}, \pi(i \mid \alpha) \neq \pi(i \mid \beta), \quad (4.7)$$

alors il existe une variable aléatoire Γ à valeurs dans \mathcal{A} telle que $q_\infty(\cdot) = \delta_\Gamma(\cdot)$ et

$$\mathbb{P}[\Gamma = \alpha] = q_0(\alpha),$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$.

Remarque. Grâce à ce théorème, on peut montrer que

$$|\phi_n\rangle\langle\phi_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} |\Gamma\rangle\langle\Gamma| \mathbb{P} p.s..$$

Notons que $\mathbb{P}[\gamma = \alpha] = q_0(\alpha)$ correspond à la probabilité d'observer α lorsqu'une mesure est effectuée directement sur le système initial. Cette remarque justifie le fait que l'on puisse interpréter le comportement asymptotique des mesures quantiques non destructives comme la réduction du paquet d'onde sur l'état initial.

Les preuves des théorèmes asymptotiques qui vont suivre reposent sur des caractéristiques concernant le changement de mesures qui ont été mises en évidence dans [BBB13]. Nous les exposons maintenant. Pour tout $\gamma \in \mathcal{A}$, notons Q_γ la probabilité définie via la formule de changement de mesure

$$dQ_\gamma = \frac{q_\infty(\gamma)}{q_0(\gamma)} d\mathbb{P}.$$

2. Voir [Doo12] pour une preuve.

On peut remarquer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, d\mathbb{Q}_\gamma|_{\mathcal{F}_n} = \frac{q_n(\gamma)}{q_0(\gamma)} d\mathbb{P}.$$

De plus,

$$\mathbb{Q}_\gamma(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A \frac{q_\infty(\gamma)}{q_0(\gamma)}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\Gamma=\gamma}}{\mathbb{P}(\Gamma=\gamma)}\right) = \mathbb{P}(A|\Gamma=\gamma),$$

pour tout A dans la tribu cylindrique. On obtient donc la décomposition suivante :

$$\mathbb{P} = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} \mathbb{P}[\Gamma=\gamma] \mathbb{P}[\cdot|\Gamma=\gamma] = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} q_0(\gamma) \mathbb{Q}_\gamma. \quad (4.8)$$

De plus, les mesures $(\mathbb{Q}_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{A}}$ sont mutuellement singulières et les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont iid sous \mathbb{Q}_γ , pour tout $\gamma \in \mathcal{A}$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_\gamma(\cap_{k=1}^n \{X_k = i_k\}) &= \frac{q_n(\gamma)}{q_0(\gamma)} \mathbb{P}(\cap_{k=1}^n \{X_k = i_k\}) \\ &= \frac{\prod_{k=1}^n \pi(i_k|\gamma)}{\sum_{\beta \in \mathcal{A}} q_0(\beta) \prod_{k=1}^n \pi(i_k|\beta)} \mathbb{P}(\cap_{k=1}^n \{X_k = i_k\}) \\ &= \prod_{k=1}^n \pi(i_k|\gamma) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{Q}_\gamma(\{X_1 = i_k\})^n, \end{aligned}$$

pour tout $(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{I}^n$.

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas markovienne en général mais si ces variables aléatoires sont conditionnées par rapport à Γ , alors elles deviennent iid. Par ailleurs, si $q_0(\gamma) = 1$, c'est-à-dire $\phi_0 = |\gamma\rangle$, l'expression (4.6) devient

$$\mathbb{P}[X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1] = \prod_{k=1}^n \pi(i_k|\gamma)$$

qui correspond au terme obtenu dans la démonstration ci-dessus. Cela signifie, en particulier, que conditionner par rapport à la valeur finale Γ est équivalent à considérer l'expérience en partant de cette valeur.

Les mesures $(\mathbb{Q}_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{A}}$ sont primordiales dans les démonstrations des théorèmes qui vont suivre.

4.2.2 Loi des grands nombres

Énonçons à présent la loi des grands nombres associée aux mesures répétées non destructives.

Théorème 4.4 ([BBB13]). *Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, la convergence suivante est vérifiée :*

$$\frac{1}{n} \log \left(\frac{q_n(\alpha)}{q_n(\Gamma)} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\Gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right) \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

Démonstration. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathcal{A}$, focalisons-nous sur

$$\frac{q_n(\alpha)}{q_n(\Gamma)} = \frac{q_0(\alpha)}{q_0(\Gamma)} \prod_{i \in \mathcal{I}} \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right)^{N_n(i)}$$

où $N_n(i) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=i}$. Par conséquent,

$$\frac{1}{n} \log \left(\frac{q_n(\alpha)}{q_n(\Gamma)} \right) = \frac{1}{n} \log \left(\frac{q_0(\alpha)}{q_0(\Gamma)} \right) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{1}{n} N_n(i) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right). \quad (4.9)$$

Comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont iid sous \mathbb{Q}_γ , la loi des grands nombres fournit la convergence suivante :

$$\frac{1}{n} N_n(i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi(i|\gamma) \quad \mathbb{Q}_\gamma \text{ p.s.} \quad (4.10)$$

Grâce à la décomposition (4.8), on a

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{n} N_n(i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi(i|\Gamma) \right) = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} q_0(\gamma) \mathbb{Q}_\gamma \left(\frac{1}{n} N_n(i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi(i|\Gamma) \right) = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} q_0(\gamma) = 1$$

pour tout $i \in \mathcal{I}$. L'ensemble \mathcal{I} étant fini, on obtient

$$\mathbb{P} \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{1}{n} N_n(i) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\Gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right) \right) = 1.$$

Le théorème découle alors de l'équation (4.9). □

La section suivante consiste notamment à étudier le théorème central limite qui permet de spécifier la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres.

4.2.3 Théorème central limite et théorème de Berry-Esseen

Nous étudions à présent le théorème central limite et le théorème de Berry-Esseen pour les mesures quantiques non destructives.

Théorème 4.5. *Soit $\alpha \in \mathcal{A}$, alors la convergence en loi*

$$Z_n = \sqrt{n} \left[\frac{1}{n} \log \left(\frac{q_n(\alpha)}{q_n(\Gamma)} \right) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\Gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right) \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z \sim \sigma(\alpha, \Gamma) \mathcal{N}(0, 1)$$

est vérifiée avec $\sigma^2(\alpha, \Gamma) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\Gamma) \left(\log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right) \right)^2 - \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\Gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right) \right)^2$.

Démonstration. En conditionnant par les différentes valeurs possibles de Γ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{itZ_n} \right) &= \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} q_0(\gamma) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma} \left(e^{itZ_n} \right) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} q_0(\gamma) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma} \left(\exp \left(it\sqrt{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i \in \mathcal{I}} (\mathbb{1}_{X_k=i} - \pi(i|\gamma)) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{n} \log \left(\frac{q_0(\alpha)}{q_0(\gamma)} \right) \right] \right) \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Première méthode : Soient α et $\gamma \in \mathcal{A}$, on introduit

$$Y_k(\alpha, \gamma) = \sum_{i \in \mathcal{I}} (\mathbf{1}_{X_k=i} - \pi(i|\gamma)) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right),$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ces variables aléatoires sont centrées, de carrés intégrables, et iid sous \mathbb{Q}_γ . Le théorème central limite classique fournit donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma} \left(e^{it \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Y_k(\alpha, \gamma)} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2} \sigma^2(\alpha, \gamma)},$$

où $\sigma^2(\alpha, \gamma) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma} (Y_1(\alpha, \gamma))^2$. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \sigma^2(\alpha, \gamma) &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma} (\mathbf{1}_{X_k=i}) \left(\log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \right)^2 \\ &\quad - 2 \sum_{j \in \mathcal{I}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma} (\mathbf{1}_{X_k=j}) \log \left(\frac{\pi(j|\alpha)}{\pi(j|\gamma)} \right) \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \right)^2 \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\gamma) \left(\log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \right)^2 - \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, l'équation (4.11) devient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(e^{itZ_n} \right) = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} q_0(\gamma) e^{-\frac{t^2}{2} \sigma^2(\alpha, \gamma)},$$

le terme de droite étant la fonction caractéristique de $Z \sim \sigma(\alpha, \Gamma) \mathcal{N}(0, 1)$.

Deuxième méthode : On pose $T_n = (\mathbf{1}_{X_n=i} - \pi(i|\gamma))_{i \in \mathcal{I}}$. Sous \mathbb{Q}_γ , $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des variables aléatoires centrées, de carrés intégrables et iid. Alors le théorème central limite classique fournit une convergence en loi par rapport à \mathbb{Q}_γ :

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} T \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

où $\Sigma = (\Sigma_{ij})_{i, j \in \mathcal{I}} \in \mathcal{M}_{|\mathcal{I}|}(\mathbb{R})$. Plus précisément, pour tout $i, j \in \mathcal{I}$,

$$\Sigma_{ij} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma} (T_n(i) T_n(j)) = -\pi(i|\gamma) \pi(j|\gamma) + \delta_{ij} \pi(i|\gamma).$$

Notons $V(\alpha, \gamma) = \left(\log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \right)_{i \in \mathcal{I}}$ pour tout $\gamma \in \mathcal{A}$, alors

$$V(\alpha, \gamma) \cdot T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} V(\alpha, \gamma) \cdot T \sim \mathcal{N}(0, V(\alpha, \gamma)^t \Sigma V(\alpha, \gamma)).$$

Lorsque n tend vers l'infini, l'équation (4.11) donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(e^{itZ_n} \right) = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} q_0(\gamma) e^{-\frac{t^2}{2} V(\alpha, \gamma)^t \Sigma V(\alpha, \gamma)}.$$

De plus, $V(\alpha, \gamma)^t \Sigma V(\alpha, \gamma) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\gamma) \left(\log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \right)^2 - \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \right)^2$, c'est pourquoi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(e^{itZ_n} \right) = \mathbb{E} \left(e^{itZ} \right).$$

□

On s'intéresse à présent au théorème de Berry-Esseen pour les mesures quantiques non destructives.

Théorème 4.6. *Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons*

$$\tilde{Z}_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma(\alpha, \Gamma)} \left[\frac{1}{n} \log \left(\frac{q_n(\alpha) q_0(\Gamma)}{q_n(\Gamma) q_0(\alpha)} \right) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\Gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right) \right]$$

alors

$$\left| \mathbb{P} \left(\tilde{Z}_n \leq x \right) - \eta(x) \right| \leq \frac{3}{\sqrt{n}} \mathbb{E} \left(\frac{\rho(\alpha, \Gamma)}{\sigma^3(\alpha, \Gamma)} \right) = \frac{C_{\text{berry}}}{\sqrt{n}},$$

où $x \in \mathbb{R}$, η est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, $\sigma^2(\alpha, \Gamma)$ est définie dans le Théorème 4.5 et

$$\begin{aligned} \rho(\alpha, \Gamma) = & \left| \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\Gamma) \left(\log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right) \right)^3 \right. \\ & - 3 \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\Gamma) \left(\log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right) \right)^2 \right) \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\Gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right) \right) \\ & \left. + 2 \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\Gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right) \right)^3 \right|. \end{aligned}$$

Démonstration. Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (4.9) fournit une nouvelle formulation pour \tilde{Z}_n :

$$\tilde{Z}_n = \frac{1}{\sigma(\alpha, \Gamma) \sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Y_k(\alpha, \Gamma).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\tilde{Z}_n \leq x \right) - \eta(x) &= \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} q_0(\gamma) \left(\mathbb{Q}_\gamma \left(\tilde{Z}_n \leq x \right) - \eta(x) \right) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} q_0(\gamma) \left(\mathbb{Q}_\gamma \left(\frac{\sum_{k=1}^n Y_k(\alpha, \gamma)}{\sigma(\alpha, \gamma) \sqrt{n}} \leq x \right) - \eta(x) \right). \end{aligned}$$

Les variables aléatoires $(Y_k(\alpha, \gamma))_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont centrées et identiquement distribuées sous \mathbb{Q}_γ . Le théorème de Berry-Esseen³ stipule que

$$\left| \mathbb{P} \left(\tilde{Z}_n \leq x \right) - \eta(x) \right| \leq \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} q_0(\gamma) \frac{3\rho(\alpha, \gamma)}{\sigma^3(\alpha, \gamma) \sqrt{n}}$$

où $\rho(\alpha, \gamma) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma} |Y_1(\alpha, \gamma)|^3$. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \rho(\alpha, \gamma) = & \left| \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\gamma) \left(\log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \right)^3 \right. \\ & - 3 \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\gamma) \left(\log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \right)^2 \right) \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \right) \\ & \left. + 2 \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \right)^3 \right|, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

3. Voir [Pro56] pour une preuve.

Le théorème central limite et le théorème de Berry-Esseen sont à la base de multiples tests statistiques, c'est pourquoi nous étudions les tests d'hypothèses dans la suite.

4.2.4 Tests d'hypothèses

Cette section vise à étudier les tests d'hypothèses construits à partir des théorèmes asymptotiques vus en amont.

Nous voulons tester si, oui ou non, le système est asymptotiquement dans l'état γ . Pour ces raisons, l'hypothèse considérée est

$$H_0 : \Gamma = \gamma,$$

on la nomme l'hypothèse nulle. L'autre hypothèse est appelée "alternative", c'est le contraire de l'hypothèse nulle. On la note :

$$H_1 : \Gamma \neq \gamma.$$

Habituellement, on cherche à désapprouver H_0 . Lorsque H_0 est rejetée, on dit que l'on "rejette l'hypothèse nulle". Inversement, lorsque l'hypothèse nulle n'est pas désapprouvée, on dit que l'on "échoue à rejeter l'hypothèse nulle". Afin de quantifier nos éventuelles erreurs, nous introduisons deux types d'erreurs : l'*erreur de type I* (notée ϵ_1) lorsque l'hypothèse H_0 est rejetée alors qu'elle est vraie et l'*erreur de type II* (notée ϵ_2) lorsque nous échouons à rejeter l'hypothèse H_0 alors qu'elle est fausse.

	H_0 est vraie	H_0 est fautive
Rejet de H_0	ϵ_1 : Erreur de type I	Rejet correct
Échec de rejet de H_0	Échec de rejet correct	ϵ_2 : Erreur de type 2

Notre but est de construire des tests $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ basés sur le Théorème 4.5, ces tests sont appelés *Z-tests*. À partir de maintenant, on fixe $\alpha \in \mathcal{A}$, et on considère la variable de décision

$$Z_n = \sqrt{n} \left[\frac{1}{n} \log \left(\frac{q_n(\alpha)}{q_n(\Gamma)} \right) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\Gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right) \right].$$

Le théorème 4.5 stipule que, sous H_0 , la variable aléatoire Z_n admet une distribution asymptotique qui est gaussienne centrée et de variance

$$\sigma^2(\alpha, \gamma) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\gamma) \left(\log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \right)^2 - \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\gamma)} \right) \right)^2.$$

Cela induit la règle de décision suivante :

$$H_0 \text{ est } \begin{cases} \text{rejetée si } |Z_n| > \sigma(\alpha, \gamma) \eta^{-1} \left(1 - \frac{\epsilon_1}{2} \right); \\ \text{non rejetée sinon.} \end{cases}$$

où η est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Ce test, noté T_α , est asymptotique et d'erreur de type I égale à ϵ_1 .

On construit à présent un test non asymptotique à l'aide du théorème de Berry-Esseen (Théorème 4.6). Introduisons la nouvelle variable de décision :

$$\tilde{Z}_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma(\alpha, \Gamma)} \left[\frac{1}{n} \log \left(\frac{q_n(\alpha) q_0(\Gamma)}{q_n(\Gamma) q_0(\alpha)} \right) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi(i|\Gamma) \log \left(\frac{\pi(i|\alpha)}{\pi(i|\Gamma)} \right) \right].$$

Le but est de construire une règle de décision symétrique à partir de \tilde{Z}_n telle que l'erreur de type I soit égale à ϵ_1 . C'est pourquoi nous voulons trouver x dans \mathbb{R} de sorte que, sous H_0 ,

$$\mathbb{P}(\tilde{Z}_n > x) \leq \frac{\epsilon_1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(\tilde{Z}_n < -x) \leq \frac{\epsilon_1}{2}. \quad (4.12)$$

Cependant, le Théorème 4.6 nous informe que

$$\mathbb{P}(\tilde{Z}_n < -x) \leq \eta(-x) + |\mathbb{P}(\tilde{Z}_n < -x) - \eta(-x)| \leq \eta(-x) + \frac{C_{berry}}{\sqrt{n}},$$

et que

$$\mathbb{P}(\tilde{Z}_n > x) \leq 1 - \eta(x) + |\mathbb{P}(\tilde{Z}_n > x) - (1 - \eta(x))| \leq 1 - \eta(x) + \frac{C_{berry}}{\sqrt{n}}.$$

Comme $\eta(-x) = 1 - \eta(x)$, en posant

$$x = \eta^{-1} \left(1 - \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{C_{berry}}{\sqrt{n}} \right),$$

les conditions (4.12) sont satisfaites. Cela induit la règle de décision suivante :

$$H_0 \text{ est } \begin{cases} \text{rejetée si } |\tilde{Z}_n| > \eta^{-1} \left(1 - \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{C_{berry}}{\sqrt{n}} \right); \\ \text{non rejetée sinon.} \end{cases}$$

Cette règle de décision régit un test, noté $T_{\alpha,n}$, non asymptotique et d'erreur de type I égale à ϵ_1 .

Nous avons présenté deux tests mais de nombreuses questions subsistent. Il serait notamment judicieux de comparer les erreurs de type II, afin de choisir l'état pointeur $|\alpha\rangle$ de sorte que T_α soit le meilleur test. Ces remarques font l'objet de travaux en cours.

Bibliographie

- [AAKV01] D. Aharonov, A. Ambainis, J. Kempe, and U. Vazirani. Quantum walks on graphs. In *Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 50–59. ACM, 2001.
- [ADP14] S. Attal, J. Deschamps, and C. Pellegrini. Entanglement of bipartite quantum systems driven by repeated interactions. *Journal of Statistical Physics*, 154(3) :819–837, 2014.
- [ADZ93] Y. Aharonov, L. Davidovich, and N. Zagury. Quantum random walks. *Physical Review A*, 48(2) :1687, 1993.
- [AGPS15] S. Attal, N. Guillotin-Plantard, and C. Sabot. Central limit theorems for open quantum random walks and quantum measurement records. *Annales Henri Poincaré*, 16(1) :15–43, 2015.
- [AJ07a] S. Attal and A. Joye. The langevin equation for a quantum heat bath. *Journal of Functional Analysis*, 247(2) :253–288, 2007.
- [AJ07b] S. Attal and A. Joye. Weak coupling and continuous limits for repeated quantum interactions. *Journal of Statistical Physics*, 126(6) :1241–1283, 2007.
- [AJP06] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet. *"Open Quantum Systems" Volume I : The Hamiltonian Approach, Volume II : The Markovian Approach, Volume III : Recent Developments*. Springer, 2006.
- [AP06] S. Attal and Y. Pautrat. From repeated to continuous quantum interactions. *Annales Henri Poincaré*, 7(1) :59–104, 2006.
- [APSS12] S. Attal, F. Petruccione, C. Sabot, and I. Sinayskiy. Open quantum random walks. *Journal of Statistical Physics*, 147(4) :832–852, 2012.
- [Att17] S. Attal. *The Theory of Quantum Noises*. Book to appear, 2017.
- [Bar06] A. Barchielli. Continual measurements in quantum mechanics and quantum stochastic calculus. *Lecture notes in mathematics - Springer*, 1882 :207, 2006.
- [BB91] A. Barchielli and V.P. Belavkin. Measurements continuous in time and a posteriori states in quantum mechanics. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 24(7) :1495, 1991.
- [BB11] M. Bauer and D. Bernard. Convergence of repeated quantum nondemolition measurements and wave-function collapse. *Physical Review A*, 84(4) :044103, 2011.
- [BBB12] M. Bauer, D. Bernard, and T. Benoist. Iterated stochastic measurements. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 45(49) :494020, 2012.
- [BBB13] M. Bauer, T. Benoist, and D. Bernard. Repeated quantum non-demolition measurements : convergence and continuous time limit. *Annales Henri Poincaré*, 14(4) :639–679, 2013.
- [BBP17] I. Bardet, D. Bernard, and Y. Pautrat. Passage times, exit times and dirichlet problems for open quantum walks. *Journal of Statistical Physics*, 167(2) :173–204, 2017.

- [BBPP18] I. Bardet, H. Bringuier, C. Pellegrini, and Y. Pautrat. Recurrence and transience of continuous time open quantum walks. *arXiv preprint*, 2018.
- [BBT14] M. Bauer, D. Bernard, and A. Tilloy. The open quantum brownian motions. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2014(9) :P09001, 2014.
- [BCL99] H. Brezis, P. G. Ciarlet, and J. L. Lions. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, volume 91. Dunod Paris, 1999.
- [Bel99] V.P. Belavkin. Measurement, filtering and control in quantum open dynamical systems. *Reports on Mathematical Physics*, 43(3) :A405–A425, 1999.
- [BG09] A. Barchielli and M. Gregoratti. *Quantum trajectories and measurements in continuous time : the diffusive case*, volume 782. Springer, 2009.
- [BGM04] L. Bouten, M. Guta, and H. Maassen. Stochastic schrödinger equations. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 37(9) :3189, 2004.
- [BGP18] T. Benoist, F. Gamboa, and C. Pellegrini. Quantum non demolition measurements : parameter estimation for mixtures of multinomials. *Electronic Journal of Statistics*, 12(1) :555–571, 2018.
- [BJM06] L. Bruneau, A. Joye, and M. Merkli. Asymptotics of repeated interaction quantum systems. *Journal of Functional Analysis*, 239(1) :310–344, 2006.
- [BJM10a] L. Bruneau, A. Joye, and M. Merkli. Infinite products of random matrices and repeated interaction dynamics. *Annales Henri Poincaré*, 46(2) :442–464, 2010.
- [BJM10b] L. Bruneau, A. Joye, and M. Merkli. Repeated and continuous interactions in open quantum systems. *Annales Henri Poincare*, 10(7) :1251–1284, 2010.
- [BJM14] L. Bruneau, A. Joye, and M. Merkli. Repeated interactions in open quantum systems. *Journal of Mathematical Physics*, 55(7) :075204, 2014.
- [BJPP18] T. Benoist, V. Jakšić, Y. Pautrat, and C.-A. Pillet. On entropy production of repeated quantum measurements i. general theory. *Communications in Mathematical Physics*, 357(1) :77–123, 2018.
- [BL05] A. Barchielli and G. Lupieri. Instruments and channels in quantum information theory. *Optics and Spectroscopy*, 99(3) :425–432, 2005.
- [BP02] H.-P. Breuer and F. Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002.
- [BP10] A. Barchielli and C. Pellegrini. Jump-diffusion unravelling of a non-Markovian generalized Lindblad master equation. *Journal of Mathematical Physics*, 51(11) :112104, 18, 2010.
- [BPZ98] A. Barchielli, A.M. Paganoni, and F. Zucca. On stochastic differential equations and semigroups of probability operators in quantum probability. *Stochastic processes and their applications*, 73(1) :69–86, 1998.
- [BR12] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics : Volume 1 : C*-and W*-Algebras. Symmetry Groups. Decomposition of States*. Springer Science & Business Media, 2012.

- [Bre07] H.-P. Breuer. Non-Markovian generalization of the Lindblad theory of open quantum systems. *Physical Review. A. Third Series*, 75(2) :022103, 9, 2007.
- [Bri17] H. Bringuier. Central limit theorem and large deviation principle for continuous time open quantum walks. *Annales Henri Poincaré*, 18(10) :3167–3192, 2017.
- [BS92] V.P. Belavkin and P. Staszewski. Nondemolition observation of a free quantum particle. *Physical Review A*, 45(3) :1347, 1992.
- [BVHJ07] L. Bouten, R. Van Handel, and M. R. James. An introduction to quantum filtering. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46(6) :2199–2241, 2007.
- [BŻ17] I. Bengtsson and K. Życzkowski. *Geometry of quantum states : an introduction to quantum entanglement*. Cambridge University Press, 2017.
- [CE79] E. Christensen and D. Evans. Cohomology of operator algebras and quantum dynamical semigroups. *The Journal of the London Mathematical Society. Second Series*, 20(2) :358–368, 1979.
- [CP05] I. Crimaldi and L. Pratelli. Convergence results for multivariate martingales. *Stochastic Processes and their Applications*, 115(4) :571–577, 2005.
- [CP15] R. Carbone and Y. Pautrat. Homogeneous open quantum random walks on a lattice. *Journal of Statistical Physics*, 160(5) :1125–1153, 2015.
- [CP16a] R. Carbone and Y. Pautrat. Irreducible decompositions and stationary states of quantum channels. *Reports on Mathematical Physics*, 77(3) :293–313, 2016.
- [CP16b] R. Carbone and Y. Pautrat. Open quantum random walks : reducibility, period, ergodic properties. *Annales Henri Poincaré*, 17(1) :99–135, 2016.
- [CTDLC79] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, and B. Crasemann. *Quantum mechanics*. AAPT, 1979.
- [Dav69] E. B. Davies. Quantum stochastic processes. *Communications in Mathematical Physics*, 15(4) :277–304, 1969.
- [Dav70] E. B. Davies. Quantum stochastic processes II. *Communications in Mathematical Physics*, 19 :83–105, 1970.
- [Dav76] E. B. Davies. *Quantum theory of open systems*. Academic Press London, 1976.
- [Dav84] M. Davis. Piecewise-deterministic markov processes : A general class of non-diffusion stochastic models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 353–388, 1984.
- [Doo12] J. L. Doob. *Measure theory*, volume 143. Springer Science & Business Media, 2012.
- [DZ10] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [EHK78] D. Evans and R. Høegh-Krohn. Spectral properties of positive maps on C^* -algebras. *Journal of the London Mathematical Society. Second Series*, 17(2) :345–355, 1978.

- [EK86] S. Ethier and T. Kurtz. *Markov processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.
- [GKS76] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan. Completely positive dynamical semigroups of n-level systems. *Journal of Mathematical Physics*, 17(5) :821–825, 1976.
- [GP01] D. Gottesman and J. Preskill. Secure quantum key distribution using squeezed states. *Physical Review A*, 63(2) :022309, 2001.
- [Gud08] S. Gudder. Quantum Markov chains. *Journal of Mathematical Physics*, 49(7) :072105, 14, 2008.
- [Har03] S. Haroche. Quantum information in cavity quantum electrodynamics : logical gates, entanglement engineering and ‘schrödinger–cat states’. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 361(1808) :1339–1347, 2003.
- [HH80] P. Hall and C. C. Heyde. *Martingale limit theory and its application*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980.
- [HJPR17] E. P. Hanson, A. Joye, Y. Pautrat, and R. Raquépas. Landauer’s principle in repeated interaction systems. *Communications in Mathematical Physics*, 349(1) :285–327, 2017.
- [IHBW90] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J.J. Bollinger, and D.J. Wineland. Quantum zeno effect. *Physical Review A*, 41(5) :2295, 1990.
- [Joy11] A. Joye. Random time-dependent quantum walks. *Communications in mathematical physics*, 307(1) :65, 2011.
- [Joy12] A. Joye. Dynamical localization for d-dimensional random quantum walks. *Quantum Information Processing*, 11(5) :1251–1269, 2012.
- [JPW14] V. Jakšić, C.-A. Pillet, and M. Westrich. Entropic fluctuations of quantum dynamical semigroups. *Journal of Statistical Physics*, 154(1-2) :153–187, 2014.
- [JS13] J. Jacod and A. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Kat95] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [Kem03] J. Kempe. Quantum random walks : an introductory overview. *Contemporary Physics*, 44(4) :307–327, 2003.
- [KM04] B. Kümmerer and H. Maassen. A pathwise ergodic theorem for quantum trajectories. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 37(49) :11889, 2004.
- [Kon02] N. Konno. Quantum random walks in one dimension. *Quantum Information Processing*, 1(5) :345–354, 2002.
- [Kra81] K. Kraus. Measuring processes in quantum mechanics i. continuous observation and the watchdog effect. *Foundations of Physics*, 11(7-8) :547–576, 1981.

- [Kra83] K. Kraus. *States, effects and operations : fundamental notions of quantum theory*. Springer, 1983.
- [Lin76] G. Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics*, 48(2) :119–130, 1976.
- [MS02] A. M. Makowski and A. Shwartz. The poisson equation for countable markov chains : probabilistic methods and interpretations. *Handbook of Markov decision processes*, pages 269–303, 2002.
- [MSK⁺13] A. Marais, I. Sinayskiy, A. Kay, F. Petruccione, and Artur Ekert. Decoherence-assisted transport in quantum networks. *New Journal of Physics*, 15(1) :013038, 2013.
- [NC10] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.
- [Nor98] J. R. Norris. *Markov chains*. Number 2. Cambridge university press, 1998.
- [Øks03] B. Øksendal. *Stochastic differential equations*. Springer, 2003.
- [Pel08] C. Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of a stochastic schrödinger equation : the diffusive case. *The Annals of Probability*, pages 2332–2353, 2008.
- [Pel10a] C. Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of the jump-type stochastic schrödinger equation for two-level systems. *Stochastic Processes and their Applications*, 120(9) :1722–1747, 2010.
- [Pel10b] C. Pellegrini. Markov chains approximation of jump–diffusion stochastic master equations. *Annales Henri Poincaré*, 46(4) :924–948, 2010.
- [Pel14] C. Pellegrini. Continuous time open quantum random walks and non-Markovian Lindblad master equations. *Journal of Statistical Physics*, 154(3) :838–865, 2014.
- [Pól21] G. Pólya. Über eine aufgabe der wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die irrfahrt im straßennetz. *Mathematische Annalen*, 84(1-2) :149–160, 1921.
- [PP09] C. Pellegrini and F. Petruccione. Non-Markovian quantum repeated interactions and measurements. *Journal of Physics. A. Mathematical and Theoretical*, 42(42) :425304, 21, 2009.
- [Pro56] Y. Prokhorov. Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. *Theory of Probability and Its Applications*, 1(2) :157–214, 1956.
- [Reb96] R. Rebolledo. Sur les semigroupes dynamiques quantiques. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, 3(1) :125–142, 1996.
- [RY99] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.
- [Sch00] R. Schrader. Perron-frobenius theory for positive maps on trace ideals. *Mathematical Physics in Mathematics and Physics*, 30 :361–378, 2000.

- [SCIB⁺15] P. Six, P. Campagne-Ibarcq, L. Bretheau, B. Huard, and P. Rouchon. Parameter estimation from measurements along quantum trajectories. *Decision and Control, 2015 IEEE 54th Annual Conference on*, pages 7742–7748, 2015.
- [SP12] I. Sinayskiy and F. Petruccione. Efficiency of open quantum walk implementation of dissipative quantum computing algorithms. *Quantum Information Processing*, 11(5) :1301–1309, 2012.
- [SSBE17] P. Strasberg, G. Schaller, T. Brandes, and M. Esposito. Quantum and information thermodynamics : A unifying framework based on repeated interactions. *Physical Review X*, 7(2) :021003, 2017.
- [Sti55] W. F. Stinespring. Positive functions on c^* -algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 6(2) :211–216, 1955.
- [TBB15] A. Tilloy, M. Bauer, and D. Bernard. Spikes in quantum trajectories. *Physical Review A*, 92(5) :052111, 2015.
- [Wol12] M. M. Wolf. Quantum channels & operations : Guided tour. *Lecture notes available at [http://www-m5.ma.tum.de/foswiki/pub M, 5](http://www-m5.ma.tum.de/foswiki/pub/M,5)*, 5, 2012.

Deuxième partie

Présentation des articles

Chapitre 5

Central limit theorem and large deviation principle for continuous time open quantum walks

Sommaire

5.1	Introduction	98
5.2	Continuous Time Open Quantum Walks	99
5.3	Central Limit Theorem	103
5.4	Large Deviation Principle	110
5.5	Examples	114

Open Quantum Walks (OQWs), originally introduced in [APSS12], are quantum generalizations of classical Markov chains. Recently, natural continuous time models of OQW have been developed in [Pel14]. These models, called Continuous Time Open Quantum Walks (CTOQWs), appear as natural continuous time limits of discrete time OQWs. In particular they are quantum extensions of continuous time Markov chains. This article is devoted to the study of homogeneous CTOQW on \mathbb{Z}^d . We focus namely on their associated quantum trajectories which allow us to prove a Central Limit Theorem for the "position" of the walker as well as a Large Deviation Principle.

5.1 Introduction

Open Quantum Walks concern evolution on lattices driven by quantum operations. They describe Markovian dynamics influenced by internal degrees of freedom. They have been introduced originally by [2] (see also [15]). These OQWs are promising tools to model physical problems, especially in computer science (see [24]). They can also model a variety of phenomena, as energy transfer in biological systems ([20]).

Continuous time models have been developed as a natural continuous time limit of discrete time models [21, 5]. In particular in [5], a natural extension of Brownian motion called Open Quantum Brownian Motion has been constructed. In this article, we focus on the continuous time open quantum walks (CTOQWs) model presented in [21]. More precisely, we focus on CTOQWs on \mathbb{Z}^d . Briefly speaking, CTOQWs on \mathbb{Z}^d concern the evolution of density operators of the form

$$\mu = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i| \in \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d} \quad (5.1)$$

where the " \mathbb{Z}^d -component" represents the "position" of the walker and \mathcal{H} is a Hilbert space describing the internal degrees of freedom. In particular, if \mathcal{D} denotes the set of density operators of the form (5.1), CTOQWs are described by a semigroup $\{\phi_t\}$ such that, ϕ_t preserves \mathcal{D} for all $t \geq 0$.

In the context of quantum walks, one is mainly interested in the position of the walker. At time 0, starting with density matrix in \mathcal{D} as (5.1), the quantum measurement of the "position" gives rise to a probability distribution q_0 on \mathbb{Z}^d , such that, for all $i \in \mathbb{Z}^d$,

$$q_0(i) = \mathbb{P}(\text{"that the walker is in } i\text{"}) = \text{Tr}(\rho(i)) .$$

As well, after evolution, if

$$\mu_t = \phi_t(\mu) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho^{(t)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|$$

then

$$q_t(i) = \mathbb{P}(\text{"that the walker, at time } t, \text{ is in } i\text{"}) = \text{Tr}(\rho^{(t)}(i)) .$$

In [21], it has been shown that usual classical continuous time Markov chains are particular cases of CTOQWs. In particular one can easily construct models where the distribution q_t corresponds to the one of a classical continuous time Markov chain. Contrary to continuous time Markov chains, the distribution q_t of CTOQWs cannot be in general recovered by the knowledge of the initial distribution q_0 . One needs to have access to the full knowledge of the initial state μ . In this sense, this justifies the name *quantum walks*.

Our models of continuous time quantum walks are rather different from the usual models of unitary quantum walks. An essential difference concerns the large time behaviour of the corresponding distribution q_t . Let Q_t be a random variable of law q_t , in the unitary quantum walk theory it has been shown that (Q_t) satisfies a Central Limit Theorem of the type

$$\frac{Q_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \tilde{Q},$$

where \tilde{Q} has distribution

$$\frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}.$$

Note that such behaviour is not usual in classical probability where usually one expects speed in \sqrt{t} and Gaussian law as limit in the Central Limit Theorem (CLT). In our context,

the distributions $(q_t)_{t \geq 0}$ express a rather classical behaviour in large time in the sense that a more usual CLT holds. In particular this paper is devoted to show that for CTOQWs one has the following weak convergence

$$\frac{Q_t - m}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

where $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ denotes usual Gaussian law. Such phenomena have also been observed in the discrete setting of OQWs [1]. A key point to show this result is the use of the quantum trajectories associated to the CTOQWs. In general, quantum trajectories describe evolutions of quantum system undergoing indirect measurements (see [3] for an introduction). In the context of CTOQWs, quantum trajectories describe the evolution of the states undergoing indirect measurements of the position of the walker. In particular these quantum trajectories appear as solution of jump-type stochastic differential equations called stochastic master equations (see [21] for link between discrete and continuous time models in the context of OQW, one can also consult [5] for such an approach in the context of Open Quantum Brownian Motion). In the physic literature, note that such models appear also naturally in order to describe non-Markovian evolutions. They are called *non-Markov generalization of Lindblad equations* (see [6, 22, 4]).

After establishing the CLT, our next goal is to investigate a Large Deviation Principle (LDP) for the position of the walker. In particular under additional assumptions, one can apply the Gärtner-Ellis Theorem in order to obtain the final result (one can consult [7] for a similar result for discrete time OQWs).

The article is structured as follows. In Section 2, we present the model of CTOQWs on \mathbb{Z}^d . Next we develop the theory of quantum trajectories which describe the continuous measurement of the position. In Section 3, we present the Central Limit Theorem. Section 4 is devoted to the Large Deviation Principle (LDP). Finally in Section 5, we present some examples which illustrate the CLT and the LDP.

5.2 Continuous Time Open Quantum Walks

5.2.1 Main setup

The models of Continuous Time Open Quantum Walks have been formalized in [21]. They arise as continuous limits of discrete time OQWs (we do not recall the discrete time models and we refer to [2]). These limits processes are described by particular types of *Lindblad master equations*. Originally, these equations appear in the "non-Markovian generalization of Lindblad theory" from Breuer [6]. In this article, we focus on nearest neighbors, homogeneous CTOQWs on \mathbb{Z}^d .

In the sequel, \mathcal{H} denotes a finite dimensional Hilbert space and $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ denotes the space of density matrix on \mathcal{H} :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \rho^* = \rho, \rho \geq 0, \text{Tr}(\rho) = 1\}.$$

We put $\mathcal{K}_d = \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$ where $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$ stands for the position of a particle while \mathcal{H} corresponds to the internal degree of freedom of this particle. We consider the canonical basis $\{e_1, \dots, e_d\}$ of \mathbb{Z}^d , we set $e_0 = 0_d$ and $e_{d+r} = -e_r$ for all $r \in \{1, \dots, d\}$. The canonical basis of $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$ is denoted by $(|i\rangle)_{i \in \mathbb{Z}^d}$.

As announced we focus on particular diagonal density matrices of \mathcal{K}_d :

$$\mathcal{D} = \left\{ \mu \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_d), \mu = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i|, \rho(i) \geq 0, \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \text{tr}(\rho(i)) = 1 \right\}.$$

In the sequel we shall consider evolutions on \mathcal{K}_d which preserve \mathcal{D} . To this end we consider a family of operators $\{D_r\}_{r=1,\dots,2d}$ on $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ and we define the operators $\{B_i^r\}_{r=1,\dots,2d}$ on $\mathcal{B}(\mathcal{K}_d)$ such that $B_i^r = D_r \otimes |i + e_r\rangle\langle i|$.

Now as announced the CTOQWs are generated by particular Lindblad master equations. Let \mathcal{M}_c the following Lindblad operator on $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c : \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}) \\ \mu &\mapsto -i[H \otimes I, \mu] + \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{r=1}^{2d} (B_i^r \mu B_i^{r*} - \frac{1}{2} \{B_i^{r*} B_i^r, \mu\}) \end{aligned}$$

where H is a self-adjoint operator on \mathcal{H} which is called the Hamiltonian.

Let us introduce the operator

$$D_0 = -iH - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{2d} D_r^* D_r.$$

The next computation shows that \mathcal{M}_c preserves the set \mathcal{D} .

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c(\mu) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left[-i[H, \rho(i)] \otimes |i\rangle\langle i| + \sum_{r=1}^{2d} D_r \rho(i) D_r^* \otimes |i + e_r\rangle\langle i + e_r| \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{2d} \{D_r^* D_r, \rho(i)\} \otimes |i\rangle\langle i| \right] \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left[(D_0 \rho(i) + \rho(i) D_0^*) \otimes |i\rangle\langle i| + \sum_{r=1}^{2d} D_r \rho(i) D_r^* \otimes |i + e_r\rangle\langle i + e_r| \right] \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left(D_0 \rho(i) + \rho(i) D_0^* + \sum_{r=1}^{2d} D_r \rho(i - e_r) D_r^* \right) \otimes |i\rangle\langle i|, \end{aligned}$$

for all $\mu = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i|$.

The following proposition describes precisely our model of CTOQWs.

Proposition 5.1. [21] *Let $\mu^{(0)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho^{(0)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|$, the equation*

$$\frac{d}{dt} \mu^{(t)} = \mathcal{M}_c(\mu^{(t)}), \tag{5.2}$$

with initial condition $\mu^{(0)}$ admits a unique solution $(\mu^{(t)})_{t \geq 0}$ with values in \mathcal{D} .

More precisely, $\mu^{(t)}$ is of the form $\mu^{(t)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho^{(t)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|$ such that :

$$\frac{d}{dt} \rho^{(t)}(i) = D_0 \rho^{(t)}(i) + \rho^{(t)}(i) D_0^* + \sum_{r=1}^{2d} D_r \rho^{(t)}(i - e_r) D_r^*,$$

for all $i \in \mathbb{Z}^d$.

Definition 5.1. The evolution (5.2) is called a Continuous Time Open Quantum Walk on \mathbb{Z}^d .

This definition is justified by the following. The operator B_i^r transcribes the idea that the particle localized in $|i\rangle$ can only jump to one of its nearest neighbors $|i + e_r\rangle$, and in this case, the transformation on \mathcal{H} is governed by D_r . In the case the particle stands still, the evolution on \mathcal{H} is governed by D_0 . It is the exact analogue of the usual OQWs for continuous time evolutions. An interesting fact has been pointed out in [21], usual continuous time classical Markov chains can be realized within this setup.

Now let us describe the probability distributions associated to CTOQWs.

Definition 5.2. Let $\mu^{(0)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho^{(0)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|$. Let $\mu^{(t)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho^{(t)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|$ be the solution of the equation

$$\frac{d}{dt} \mu^{(t)} = \mathcal{M}_c(\mu^{(t)}).$$

We define

$$q_t(i) = \text{Tr}[\mu^{(t)} (I \otimes |i\rangle\langle i|)] = \text{Tr}[\rho^{(t)}(i)] \quad (5.3)$$

and we denote Q_t the random variable on \mathbb{Z}^d of law q_t , that is

$$\mathbb{P}[Q_t = i] = q_t(i),$$

for all $i \in \mathbb{Z}^d$.

As we can see in Section 3 and as it was announced in the introduction, the shape of q_t seems to converge to Gaussian shape. This is exactly the result pointed out by the CLT in Section 3. In order to prove this, we shall need the theory of quantum trajectories for CTOQWs.

5.2.2 Quantum trajectories

As in the discrete case, quantum trajectories are essential tools for showing the CLT and the LDP. The description of quantum trajectories is less straightforward than the one in OQWs. It makes use of stochastic differential equations driven by jump processes. We refer to [21] for the justification of the below description and the link between discrete and continuous time models. One can also consult [6] where general indirect measurements for non-markovian generalization of Lindblad equations have been developed.

Proposition 5.2. Let $\mu^{(0)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho^{(0)}(i) \otimes |i\rangle\langle i|$ be an initial state on $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$. The quantum trajectory describing the indirect measurement of the position of the CTOQWs led by \mathcal{M}_c is modeled by a Markov process $(\omega^{(t)} = \rho_t \otimes |X_t\rangle\langle X_t|)_{t \geq 0}$. This Markov process is valued in the set

$$\mathcal{P} = \{\rho \otimes |i\rangle\langle i|, \rho \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}, i \in \mathbb{Z}^d\}$$

such that

$$\omega^{(0)} = \frac{\rho^{(0)}(i)}{\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))} \otimes |i\rangle\langle i| \text{ with probability } \text{Tr}(\rho^{(0)}(i))$$

and such that the following differential equation is satisfied :

$$\begin{aligned} \omega^{(t)} = & \omega^{(0)} + \int_0^t \left(D_0 \rho_{s-} + \rho_{s-} D_0^* - \rho_{s-} \text{Tr}(D_0 \rho_{s-} + \rho_{s-} D_0^*) \right) \otimes |X_{s-}\rangle\langle X_{s-}| \, ds \\ & + \sum_{r=1}^{2d} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{D_r \rho_{s-} D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_{s-} D_r^*)} \otimes |X_{s-} + e_r\rangle\langle X_{s-} + e_r| \right. \\ & \left. - \rho_{s-} \otimes |X_{s-}\rangle\langle X_{s-}| \right) \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(D_r \rho_{s-} D_r^*)} \mathcal{N}^r(dy, ds) \end{aligned} \quad (5.4)$$

where $\{N^r\}_{r \in \{1, \dots, 2d\}}$ are independent Poisson point processes on \mathbb{R}^2 .

In particular the Markov process $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ is valued in $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} \times \mathbb{Z}^d$ and satisfies

$$\begin{aligned} d\rho_s &= \left(D_0 \rho_{s-} + \rho_{s-} D_0^* - \rho_{s-} \text{Tr}(D_0 \rho_{s-} + \rho_{s-} D_0^*) \right) ds \\ &\quad + \sum_{r=1}^{2d} \int_{y \in \mathbb{R}} \left(\frac{D_r \rho_{s-} D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_{s-} D_r^*)} - \rho_{s-} \right) \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(D_r \rho_{s-} D_r^*)} N^r(dy, ds), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$dX_s = \sum_{r=1}^{2d} \int_{y \in \mathbb{R}} e_r \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(D_r \rho_{s-} D_r^*)} N^r(dy, ds) \quad (5.6)$$

and $(\rho_0, X_0) = \left(\frac{\rho^{(0)}(i)}{\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))}, i \right)$ with probability $\text{Tr}(\rho^{(0)}(i))$.

Remark : The second expression of the description of quantum trajectories is the exact continuous time analogue of the one described in [1] for OQWs. Let us briefly explain how the quantum trajectories evolve in time. To this end we introduce :

$$\forall r \in \{1, \dots, 2d\}, \tilde{N}^r(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(D_r \rho_{s-} D_r^*)} N^r(dy, ds). \quad (5.7)$$

The processes \tilde{N}^r are Poisson processes with intensity $\int_0^t \text{Tr}(D_r \rho_{s-} D_r^*) ds$. In particular the processes

$$\tilde{N}^r(t) - \int_0^t \text{Tr}(D_r \rho_{s-} D_r^*) ds$$

are martingales with respect to the filtration induced by $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$. The evolution described by (6.11) is deterministic and interrupted by jumps occurring at random time, it is typically a Piecewise Deterministic Markov Process. The jumps are generated by the Poisson processes (5.7). As we can check from Eq. (6.11), if $\omega^{(0)} = \rho \otimes |i\rangle\langle i|$ for some $\rho \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ and $i \in \mathbb{Z}^d$ (that is $|X_0\rangle = |i\rangle$), the deterministic evolution let the position unchanged until a jump occurs. Since the Poisson processes N^r are independent, only one Poisson process is involved. If T denotes the time of the first jump and assume the process N^r is involved, the internal degree of freedom is updated by $\rho_T = \frac{D_r \rho_{T-} D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_{T-} D_r^*)}$ and the position is changed and becomes $|i + e_r\rangle$. This means that the particle has jumped from the position $|i\rangle$ to the position $|i + e_r\rangle$. In other words we have $|X_t\rangle = |i\rangle$, for all $0 \leq t \leq T-$ and $|X_T\rangle = |i + e_r\rangle$. Next, the deterministic evolution starts again with the new initial condition $\rho_T \otimes |i + e_r\rangle\langle i + e_r|$ until a new jump occur and so on.

The following result allows us to make the connection between CTOQWs and their associated quantum trajectories.

Proposition 5.3. *Let $\mu^{(t)}$ the OQW defined in Proposition 5.1 and $\omega^{(t)}$ the associated quantum trajectory defined in Proposition 6.2. Then we have*

$$\forall t \geq 0, \mathbb{E}(\omega^{(t)}) = \mu^{(t)}.$$

Moreover, for all $t \geq 0$, the random variables X_t and Q_t have the same distributions q_t .

Proof. The first part is proved in [21]. For the second part, let ϕ a bounded continuous

map on \mathbb{Z}^d , we get :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(Q_t)) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \phi(i) \text{Tr}(\mu^{(t)}(I \otimes |i\rangle\langle i|)) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \phi(i) \text{Tr}(\mathbb{E}(\omega^{(t)})(I \otimes |i\rangle\langle i|)) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \phi(i) \mathbb{E} \left(\text{Tr}(\omega^{(t)}(I \otimes |i\rangle\langle i|)) \right) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \phi(i) \mathbb{E}(\text{Tr}(|X_t\rangle\langle X_t| |i\rangle\langle i|)) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \phi(i) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_t=i}) \\
&= \mathbb{E}(\phi(X_t)),
\end{aligned}$$

and the result holds.

In the next section, we state the CLT.

5.3 Central Limit Theorem

This section is devoted to prove the Central Limit Theorem for CTOQWs. The result holds under some assumption concerning the Lindblad operator on \mathcal{H} . This operator is defined below.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\
\rho &\mapsto D_0\rho + \rho D_0^* + \sum_{r=1}^{2d} D_r\rho D_r^*.
\end{aligned}$$

Our main assumption for the CLT is the following.

— (H1) There exists a unique density matrix $\rho_{inv} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ such that

$$\mathcal{L}(\rho_{inv}) = 0.$$

In particular $\dim \text{Ker}(\mathcal{L}) = 1$.

Under the condition (H1), we have the following ergodic theorem which is a particular case of the Ergodic Theorem of [18]. In particular this theorem shall be useful in the proof of the CLT.

Theorem 5.1 ([18]). *Assume (H1). Let $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ the Markov process defined in Proposition 6.2, therefore*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \rho_s ds \xrightarrow{a.s.} \rho_{inv}.$$

Now, our strategy to show the CLT consists in reducing the problem to a CLT for martingales with the help of the solution of the Poisson equation. To this end let us introduce the generator of the process $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$.

We denote \mathcal{A} the Markov generator of the process $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ and $\mathbb{D}(\mathcal{A})$ its domain. For all $f \in \mathbb{D}(\mathcal{A})$, $\rho \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ and $x \in \mathbb{Z}^d$, we get

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}f(\rho, x) &= D_\rho f(\mathcal{F}(\rho)) \\
&+ \sum_{r=1}^{2d} \left[f \left(\frac{D_r \rho D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho D_r^*)}, x + e_r \right) - f(\rho, x) \right] \text{Tr}(D_r \rho D_r^*) \quad (5.8)
\end{aligned}$$

where $\mathcal{F}(\rho) = D_0\rho + \rho D_0^* - \rho \text{Tr}(D_0\rho + \rho D_0^*)$ for all $\rho \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ and where $D_\rho f$ denotes the partial differential of f with respect to ρ .

Remark : Note that in the sequel we do not need to make precise the exact domain of \mathcal{A} . Actually we shall apply the Markov generator on \mathcal{C}^1 functions.

We shall also need the following quantity,

$$m = \sum_{r=1}^{2d} \text{Tr}(D_r \rho_{inv} D_r^*) e_r .$$

The following lemma shall be used in the proof.

Lemma 5.1. *For all $u \in \mathbb{R}^d$, the equation*

$$\mathcal{L}^*(J_u) = - \left(\sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) D_r^* D_r - (m \cdot u) I \right) \quad (5.9)$$

admits a solution and the difference between any couple of solutions of (5.9) is a multiple of the identity.

Proof. First, let us remark that

$$\text{Tr} \left(\rho_{inv} \left(\sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) D_r^* D_r - (m \cdot u) I \right) \right) = \sum_{r=1}^{2d} \text{Tr}(D_r \rho_{inv} D_r^*) (e_r \cdot u) - (m \cdot u) \text{Tr}(\rho_{inv}) = 0 ,$$

which implies that $-\left(\sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) D_r^* D_r - (m \cdot u) I \right) \in \{\rho_{inv}\}^\perp$. But by hypothesis, we have $\{\rho_{inv}\}^\perp = \text{Ker}(\mathcal{L})^\perp$. Moreover, since $\text{Ker}(\mathcal{L})^\perp = \text{Im}(\mathcal{L}^*)$, we finally get that

$$-\left(\sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) D_r^* D_r - (m \cdot u) I \right) \in \text{Im}(\mathcal{L}^*)$$

which proves the existence of the lemma. Now we prove the second part. To this end consider J_u and J'_u two solutions of (5.9) and set $H_u = J_u - J'_u$. It is then clear that

$$\mathcal{L}^*(H_u) = 0 .$$

Therefore $H_u \in \text{Ker}(\mathcal{L}^*)$. Since $\dim \text{Ker}(\mathcal{L}) = 1$, we get $\dim \text{Ker}(\mathcal{L}^*) = 1$ and since

$$\mathcal{L}^*(I) = D_0^* + D_0 + \sum_{r=1}^{2d} D_r^* D_r = 0 ,$$

the operator H_u is necessarily a multiple of the identity.

From now on, for $u \in \mathbb{R}^d$, we denote J_u the unique solution of (5.9) such that $\text{Tr}(J_u) = 0$. Moreover, if $u = e_r$, then we simply write $J_u = J_r$. Using the linearity of \mathcal{L}^* , one can notice that :

$$J_u = \sum_{r=1}^d u_r J_r ,$$

for all $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$.

The next lemma concerns the Poisson equation in our context (see [19] for more details on the Poisson equation).

Lemma 5.2. For all $(\rho, x) \in \mathbb{S} \times \mathbb{Z}^d$ and $u \in \mathbb{R}^d$, let set

$$f_u(\rho, x) = \text{Tr}(\rho J_u) + x \cdot u. \quad (5.10)$$

Then f_u is solution of the Poisson equation :

$$\mathcal{A}f_u(\rho, x) = m \cdot u. \quad (5.11)$$

Proof. For all $(\rho, x) \in \mathbb{S} \times \mathbb{Z}^d$ and $u \in \mathbb{R}^d$, we complete the following computation :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f_u(\rho, x) &= \text{Tr}(\mathcal{F}(\rho)J_u) \\ &+ \sum_{r=1}^{2d} \left[\text{Tr} \left(\frac{D_r \rho D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho D_r^*)} J_u \right) + x \cdot u + e_r \cdot u - \text{Tr}(\rho J_u) - x \cdot u \right] \text{Tr}(D_r \rho D_r^*) \\ &= \text{Tr} \left(D_0 \rho J_u + \rho D_0^* J_u - \text{Tr}(D_0 \rho + \rho D_0^*) \rho J_u \right) \\ &+ \sum_{r=1}^{2d} \text{Tr}(D_r \rho D_r^* J_u) + \text{Tr}(D_r \rho D_r^*) (e_r \cdot u) - \text{Tr} \left(\text{Tr}(D_r \rho D_r^*) \rho J_u \right) \\ &= \text{Tr} \left(\rho \left[J_u D_0 + D_0^* J_u + \sum_{r=1}^{2d} D_r^* J_u D_r + \sum_{r=1}^{2d} D_r^* D_r (e_r \cdot u) \right] \right) \\ &= \text{Tr} \left(\rho \left[\mathcal{L}^*(J_u) + \sum_{r=1}^{2d} D_r^* D_r (e_r \cdot u) \right] \right) \\ &= \text{Tr}((m \cdot u) \rho) \\ &= m \cdot u, \end{aligned}$$

so f_u is solution of the Poisson equation (5.11).

Now we have found the solution of the Poisson equation, we express the CLT for martingales that we shall use.

Theorem 5.2 ([10]). Let $(M_t)_{t \geq 0}$ be a real, càdlàg, and square integrable martingale. Suppose the following conditions :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \sup_{0 \leq s \leq t} |\Delta M_s| \right) = 0 \quad (5.12)$$

and

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[M, M]_t}{t} = \sigma^2 \quad (5.13)$$

for some $\sigma \geq 0$, then

$$\frac{M_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

We shall also use the following lemma which is a straightforward consequence of the law of large numbers for martingales (see [23]).

Lemma 5.3. Let Z_t a real, càdlàg, and square integrable martingale which satisfies

$$\langle Z, Z \rangle_t \leq Kt$$

for a constant K , then

$$\frac{Z_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{a.s.} 0.$$

The last lemma below shall be useful in this part as well as in the next one. From now on, we denote $|u|$ the Euclidean norm of $u \in \mathbb{R}^d$.

Lemma 5.4. *For all $t \geq 0$ and all $u \in \mathbb{R}^d$, we have*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s - X_0| \right] &\leq (2d)t \quad \text{and} \\ \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} e^{u \cdot (X_s - X_0)} \right] &\leq \exp \left((2d)t(e^{|u|} - 1) \right). \end{aligned}$$

Proof. Let $t \geq 0$ and $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} e^{u \cdot (X_s - X_0)} \right] &\leq \mathbb{E} \left[e^{|u| \int_0^t |dX_s|} \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\exp \left(|u| \sum_{r=1}^{2d} \int_{v=0}^t \int_{y \in \mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(D_r \rho_v D_r^*)} N^r(dy, dv) \right) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\exp \left(|u| \sum_{r=1}^{2d} \int_0^t \int_{y=0}^1 N^r(dy, dv) \right) \right]. \end{aligned}$$

Since N^r are independent Poisson point processes on \mathbb{R}^2 , we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} e^{u \cdot (X_s - X_0)} \right] &\leq \mathbb{E} \left[\exp \left(|u| \int_0^t \int_{y=0}^1 N^1(dy, dv) \right) \right]^{2d} \\ &\leq \exp \left((2d)t(e^{|u|} - 1) \right). \end{aligned}$$

In the same way, one can prove that

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s - X_0| \right] \leq \mathbb{E} \left[\sum_{r=1}^{2d} \int_{v=0}^t \int_{y=0}^1 N^r(dy, dv) \right] \leq (2d)t.$$

Now, we are in the position to state the main result of this section.

Theorem 5.3. *Assume (H_1) holds. Let $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ the Markov process defined in Proposition 6.2 then*

$$\frac{X_t - tm}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V),$$

where $V \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ such that for all $r, q \in \{1, \dots, d\}$,

$$\begin{aligned} V_{rq} &= -m_q \text{Tr}(\rho_{inv} J_r) - m_r \text{Tr}(\rho_{inv} J_q) \\ &\quad + \delta_{rq} (\text{Tr}(D_r \rho_{inv} D_r^*) + \text{Tr}(D_{r+d} \rho_{inv} D_{r+d}^*)) \\ &\quad + \text{Tr}(D_q \rho_{inv} D_q^* J_r) + \text{Tr}(D_r \rho_{inv} D_r^* J_q) \\ &\quad - \text{Tr}(D_{q+d} \rho_{inv} D_{q+d}^* J_r) - \text{Tr}(D_{r+d} \rho_{inv} D_{r+d}^* J_q). \end{aligned}$$

Remark : Proposition 5.3 implies then the CLT for the process $(Q_t)_{t \geq 0}$ as it holds for $(X_t)_{t \geq 0}$.

Proof. As announced, the proof is a combination of Lemma 5.2 and Theorem 5.2. Let $u \in \mathbb{R}^d$ and f_u the \mathcal{C}^1 function defined in Lemma 5.2. Since \mathcal{A} is the generator of $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$, following the theory of problem of martingale, the process $(M_t)_{t \geq 0}$ defined by

$$\begin{aligned} M_t &= f_u(\rho_t, X_t) - f_u(\rho_0, X_0) - \int_0^t \mathcal{A} f_u(\rho_{s-}, X_{s-}) ds \\ &= \text{Tr}(\rho_t J_u) - \text{Tr}(\rho_0 J_u) + X_t \cdot u - X_0 \cdot u - (m \cdot u)t \end{aligned}$$

is a local martingale with respect to the filtration \mathcal{F} associated to $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ (see [23, 13] for more details on problem of martingale). In order to apply Theorem 5.2, we shall show that

(M_t) is a true martingale. To this end it is sufficient to show that $\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|\right) < \infty$ (see [13] for more details). This way, since $|\text{Tr}(\rho J_u)| \leq \|J_u\|_\infty$ for all $\rho \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, one can check with the help of Lemma 5.4 that

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|\right) \leq 2\|J_u\|_\infty + 2d|u|t + |m \cdot u|t.$$

Now we shall see that (M_t) fulfills the conditions of Theorem 5.2. The first one is the easiest one. Indeed,

$$|\Delta M_s| \leq |\text{Tr}(\Delta \rho_s J_u)| + |\Delta X_s \cdot u| \leq 2\|J_u\|_\infty + |u|.$$

This shows that ΔM_s is bounded independently of s and thus the condition (5.12) holds. Now, we check that (M_t) satisfies Equation (5.13). The bracket $[M, M]_t$ satisfies :

$$\begin{aligned} d[M, M]_s &= d[u \cdot X, u \cdot X]_s + 2d[u \cdot X, \text{Tr}(\rho J_u)]_s + d[\text{Tr}(\rho J_u), \text{Tr}(\rho J_u)]_s \\ &= \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u)^2 \tilde{N}^r(ds) + 2 \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) \text{Tr}\left(\frac{D_r \rho_s - D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_s - D_r^*)} J_u\right) \tilde{N}^r(ds) \\ &\quad - 2 \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) \text{Tr}(\rho_s - J_u) \tilde{N}^r(ds) + \sum_{r=1}^{2d} \text{Tr}\left(\frac{D_r \rho_s - D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_s - D_r^*)} J_u\right)^2 \tilde{N}^r(ds) \\ &\quad - 2 \sum_{r=1}^{2d} \text{Tr}\left(\frac{D_r \rho_s - D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_s - D_r^*)} J_u\right) \text{Tr}(\rho_s - J_u) \tilde{N}^r(ds) + \sum_{r=1}^{2d} \text{Tr}(\rho_s - J_u)^2 \tilde{N}^r(ds) \\ &= \sum_{r=1}^{2d} \left(\text{Tr}\left(\frac{D_r \rho_s - D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_s - D_r^*)} J_u\right)^2 - \text{Tr}(\rho_s - J_u)^2 \right) \tilde{N}^r(ds) \\ &\quad - 2 \text{Tr}(\rho_s - J_u) \sum_{r=1}^{2d} \left(\text{Tr}\left(\frac{D_r \rho_s - D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_s - D_r^*)} J_u\right) - \text{Tr}(\rho_s - J_u) + (e_r \cdot u) \right) \tilde{N}^r(ds) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u)^2 \tilde{N}^r(ds) + 2 \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) \text{Tr}\left(\frac{D_r \rho_s - D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_s - D_r^*)} J_u\right) \tilde{N}^r(ds). \end{aligned}$$

Now we shall make the martingales $Y^r(t) = \tilde{N}^r(t) - \int_0^t \text{Tr}(D_r \rho_s - D_r^*) ds$ appear in the first and the last term of the above expression. Concerning the second term, we recognize $d\text{Tr}(\rho_s J_u)$ and $d(X_s \cdot u)$ to get

$$\begin{aligned} d[M, M]_s &= \sum_{r=1}^{2d} \left(\text{Tr}\left(\frac{D_r \rho_s - D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_s - D_r^*)} J_u\right)^2 - \text{Tr}(\rho_s - J_u)^2 \right) Y^r(ds) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{2d} \left(\text{Tr}\left(\frac{D_r \rho_s - D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_s - D_r^*)} J_u\right)^2 - \text{Tr}(\rho_s - J_u)^2 \right) \text{Tr}(D_r \rho_s - D_r^*) ds \\ &\quad - 2 \text{Tr}(\rho_s - J_u) \left(d\text{Tr}(\rho_s J_u) + d(X_s \cdot u) - \text{Tr}(\mathcal{F}(\rho_{s-}) J_u) ds \right) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u)^2 Y^r(ds) + 2 \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) \text{Tr}\left(\frac{D_r \rho_s - D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_s - D_r^*)} J_u\right) Y^r(ds) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u)^2 \text{Tr}(D_r \rho_s - D_r^*) ds + 2 \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) \text{Tr}(D_r \rho_s - D_r^* J_u) ds. \quad (5.14) \end{aligned}$$

One can remark that for $h(\rho, x) := \text{Tr}(\rho J_u)^2$, we get for all $(\rho, x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}} \times \mathbb{Z}^d$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}h(\rho, x) &= 2\text{Tr}(\mathcal{F}(\rho)J_u)\text{Tr}(\rho J_u) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{2d} \left(\text{Tr} \left(\frac{D_r \rho D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho D_r^*)} J_u \right)^2 - \text{Tr}(\rho J_u)^2 \right) \text{Tr}(D_r \rho D_r^*). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Since $h \in \mathcal{C}^1$, the process $(S_t^h)_{t \geq 0}$ defined by :

$$S_t^h = \text{Tr}(\rho_t J_u)^2 - \text{Tr}(\rho_0 J_u)^2 - \int_0^t \mathcal{A}h(\rho_{s-}, X_{s-}) ds$$

is a local martingale. Besides, since $|\text{Tr}(\rho J_u)| \leq \|J_u\|_{\infty}$ for all $\rho \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, one has

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |S_s^h| \right) \leq \alpha + \beta t < \infty$$

for all $t \geq 0$, so S_t^h is actually a true martingale.

Now using Equation (5.15) in the second line of (5.14) and recognizing dM_t in the third one, we have

$$\begin{aligned} d[M, M]_s &= \sum_{r=1}^{2d} \left(\text{Tr} \left(\frac{D_r \rho_{s-} D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_{s-} D_r^*)} J_u \right)^2 - \text{Tr}(\rho_{s-} J_u)^2 \right) Y^r(ds) \\ &\quad + \mathcal{A}h(\rho_{s-}, X_{s-}) ds - 2\text{Tr}(\mathcal{F}(\rho_{s-})J_u)\text{Tr}(\rho_{s-} J_u) ds \\ &\quad - 2\text{Tr}(\rho_{s-} J_u) (dM_s + (m \cdot u) ds - \text{Tr}(\mathcal{F}(\rho_{s-})J_u) ds) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u)^2 Y^r(ds) + 2 \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) \text{Tr} \left(\frac{D_r \rho_{s-} D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_{s-} D_r^*)} J_u \right) Y^r(ds) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u)^2 \text{Tr}(D_r \rho_{s-} D_r^*) ds + 2 \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) \text{Tr}(D_r \rho_{s-} D_r^* J_u) ds \\ &= \sum_{r=1}^{2d} \left(\text{Tr} \left(\frac{D_r \rho_{s-} D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_{s-} D_r^*)} J_u \right)^2 - \text{Tr}(\rho_{s-} J_u)^2 + (e_r \cdot u)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(e_r \cdot u) \text{Tr} \left(\frac{D_r \rho_{s-} D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_{s-} D_r^*)} J_u \right) \right) Y^r(ds) \\ &\quad - dS_s^h - 2\text{Tr}(\rho_{s-} J_u) dM_s + d(\text{Tr}(\rho_s J_u)^2) \\ &\quad + \text{Tr} \left(\rho_{s-} \left[-2(m \cdot u) J_u + \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u)^2 D_r^* D_r + 2 \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) D_r^* J_u D_r \right] \right) ds. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Let us denote by H_s^r the term in front of $Y^r(ds)$. Now, we shall apply Lemma 5.3. To this end, recall that for all $\rho \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, $|\text{Tr}(\rho J_u)| \leq \|J_u\|_{\infty}$, this implies the following estimates :

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^\cdot H_s^r dY_s^r, \int_0^\cdot H_s^r dY_s^r \right\rangle_t &\leq (2\|J_u\|_{\infty}^2 + |u|^2 + 2|u|\|J_u\|_{\infty})^2 \|D_r^* D_r\|_{\infty} t, \\ \left\langle \int_0^\cdot -2\text{Tr}(\rho_{s-} J_u) dM_s, \int_0^\cdot -2\text{Tr}(\rho_{s-} J_u) dM_s \right\rangle_t &\leq 4\|J_u\|_{\infty}^2 (|u| + 2\|J_u\|_{\infty})^2 \left(\sum_{r=1}^{2d} \|D_r^* D_r\|_{\infty} \right) t, \\ \langle S^h, S^h \rangle_t &\leq 64\|J_u\|_{\infty}^4 \left(\sum_{r=1}^{2d} \|D_r^* D_r\|_{\infty} \right) t. \end{aligned}$$

Lemma 5.3 shows that only the last term of (5.16) contributes to $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[M, M]_t}{t}$. Applying Theorem 5.1, we get

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[M, M]_t}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Tr} \left(\rho_{s-} \left[-2(m \cdot u) J_u + \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u)^2 D_r^* D_r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) D_r^* J_u D_r \right] \right) ds \\ &= \text{Tr} \left(\rho_{inv} \left[-2(m \cdot u) J_u + \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u)^2 D_r^* D_r + 2 \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) D_r^* J_u D_r \right] \right). \end{aligned}$$

Now defining $\sigma_u^2 = \text{Tr} \left(\rho_{inv} \left[-2(m \cdot u) J_u + \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u)^2 D_r^* D_r + 2 \sum_{r=1}^{2d} (e_r \cdot u) D_r^* J_u D_r \right] \right)$, Theorem 5.2 states that :

$$\frac{M_t}{\sqrt{t}} = \frac{X_t \cdot u - (m \cdot u)t + \text{Tr}(\rho_t J_u) - \text{Tr}(\rho_0 J_u) - X_0 \cdot u}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_u^2).$$

Since $(\text{Tr}(\rho_t J_u) - \text{Tr}(\rho_0 J_u) - X_0 \cdot u)$ is bounded independently of t , one can obviously deduce that for all $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$, one has

$$\frac{X_t \cdot u - (m \cdot u)t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_u^2),$$

where

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= -2 \sum_{r,q=1}^d u_r u_q m_q \text{Tr}(\rho_{inv} J_r) + \sum_{r=1}^d u_r^2 \left(\text{Tr}(D_r \rho_{inv} D_r^*) + \text{Tr}(D_{r+d} \rho_{inv} D_{r+d}^*) \right) \\ &\quad + 2 \sum_{r,q=1}^d u_r u_q \left(\text{Tr}(D_q \rho_{inv} D_q^* J_r) - \text{Tr}(D_{q+d} \rho_{inv} D_{q+d}^* J_r) \right). \end{aligned}$$

Finally we can check that $\sigma_u^2 = \sum_{r,q=1}^d u_r u_q V_{rq}$ for all $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$, which ends the proof.

We finish this section by specifying the case $d = 1$. This is the simpler case where the walker can only jump to the right or the left. The Markov process $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$, with values in $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} \times \mathbb{Z}$, is defined by the following differential equations :

$$\begin{aligned} d\rho_s &= \left(D_0 \rho_{s-} + \rho_{s-} D_0^* - \rho_{s-} \text{Tr}(D_0 \rho_{s-} + \rho_{s-} D_0^*) \right) ds \\ &\quad + \left(\frac{D_1 \rho_{s-} D_1^*}{\text{Tr}(D_1 \rho_{s-} D_1^*)} - \rho_{s-} \right) \tilde{N}^1(ds) + \left(\frac{D_2 \rho_{s-} D_2^*}{\text{Tr}(D_2 \rho_{s-} D_2^*)} - \rho_{s-} \right) \tilde{N}^2(ds) \end{aligned}$$

$$\text{and } dX_s = \tilde{N}^1(ds) - \tilde{N}^2(ds),$$

where $D_0, D_1, D_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ such that $D_0 + D_0^* + D_1^* D_1 + D_2^* D_2 = 0$.

Theorem 5.4. *Suppose that the Lindblad operator*

$$\mathcal{L}(\rho) = D_0 \rho + \rho D_0^* + D_1 \rho D_1^* + D_2 \rho D_2^*$$

admits a unique density matrix ρ_{inv} such that $\mathcal{L}(\rho_{inv}) = 0$.

Set $m = \text{Tr}(D_1 \rho_{inv} D_1^*) - \text{Tr}(D_2 \rho_{inv} D_2^*)$, and let J the unique solution of $\mathcal{L}^*(J) = -D_1^* D_1 + D_2^* D_2 + mI$ such that $\text{Tr}(J) = 0$.

Then, we have the following CLT

$$\frac{X_t - tm}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

where $\sigma^2 = \text{Tr}(\rho_{inv}[-2mJ + D_1^* D_1 + D_2^* D_2 + 2D_1^* J D_1 - 2D_2^* J D_2])$.

5.4 Large Deviation Principle

Here, we study a Large Deviation Principle (LDP) for CTOQWs. Our proof is inspired by strategies developed in [16, 7] which are essentially based on the application of the Gärtner-Ellis Theorem ([12]). In the following, one can notice that the Perron-Frobenius Theorem for positive maps ([14]) is the main tool to apply the Gärtner-Ellis Theorem.

In order to prove the LDP, we shall use a deformed Lindblad operator. From now on, we define for all $u \in \mathbb{R}^d$, the operators $D_r^{(u)} = e^{\frac{u \cdot e_r}{2}} D_r$, $r \in \{0, \dots, 2d\}$, and we denote $\mathcal{L}^{(u)}$ the deformed Lindblad operator associated to the operators $D_r^{(u)}$, that is,

$$\mathcal{L}^{(u)}(\rho) = D_0 \rho + \rho D_0^* + \sum_{r=1}^{2d} e^{u \cdot e_r} D_r \rho D_r^*,$$

for all $\rho \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.

Now, defining

$$\phi^{(u)}(\rho) = \sum_{r=1}^{2d} e^{u \cdot e_r} D_r \rho D_r^*,$$

for all $\rho \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ and all $u \in \mathbb{R}^d$, we can see that $\mathcal{L}^{(u)}$ is written in the usual Lindblad form, that is $\mathcal{L}^{(u)}(\rho) = D_0 \rho + \rho D_0^* + \phi^{(u)}(\rho)$. This way, the semi-group $\{e^{t\mathcal{L}^{(u)}}\}_{t \geq 0}$ is a completely positive (CP) semi-group (see [9] for the proof). In a same way, we write \mathcal{L} as :

$$\mathcal{L}(\rho) = D_0 \rho + \rho D_0^* + \phi(\rho)$$

for all $\rho \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ where $\phi(\rho) = \sum_{r=1}^{2d} D_r \rho D_r^*$.

In this part, the notion of irreducibility is required. This notion was originally defined in [11]. There are several equivalent definitions that the reader can find in [7, 8].

Definition 5.3. The CP map $\phi : \rho \mapsto \sum_{r=1}^{2d} D_r \rho D_r^*$ is called irreducible if for any non-zero $x \in \mathcal{H}$, the set $\mathbb{C}[D]x$ is dense in \mathcal{H} , where $\mathbb{C}[D]$ is the set of polynomials in D_r , $r \in \{1, \dots, 2d\}$.

In the sequel, we need $\{e^{t\mathcal{L}^{(u)}}\}_{t \geq 0}$ to be positivity improving. This means that for all $t > 0$ and for all $A \geq 0$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, one has $e^{t\mathcal{L}^{(u)}}(A) > 0$. The following lemma provides an effective criterion for verifying that $\{e^{t\mathcal{L}^{(u)}}\}_{t \geq 0}$ is positivity improving.

Lemma 5.5. *If ϕ is irreducible, then $\phi^{(u)}$ is irreducible by a direct application of Definition 6.1 and therefore $\{e^{t\mathcal{L}^{(u)}}\}_{t \geq 0}$ is positivity improving ([16]).*

The next two lemmas are relevant in the proof of the main theorem of this part. In particular, the following lemma describes the largest eigenvalue associated to the deformed Lindblad semigroup $\{e^{t\mathcal{L}^{(u)}}\}_{t \geq 0}$.

Lemma 5.6. *Let $t \geq 0$, suppose that ϕ is irreducible. Set*

$$l_u = \max\{\operatorname{Re}(\lambda), \lambda \in \operatorname{Sp}(\mathcal{L}^{(u)})\}.$$

Then e^{tl_u} is an algebraically simple eigenvalue of $e^{t\mathcal{L}^{(u)}}$, and the associated eigenvector V_u is strictly positive (which can be normalized to be in $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$). Besides, the map $u \mapsto l_u$ can be extended to be analytic in a neighbourhood of \mathbb{R}^d .

Proof. The first part has been proved in [16], the proof is based on the Perron-Frobenius Theorem for CP maps ([14]). In particular, using such result, one get that e^{tl_u} is an geometric simple eigenvalue of $e^{t\mathcal{L}^{(u)}}$, and the associated eigenvector $V_u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ is strictly positive. It remains to show the algebraic simplicity of the eigenvalue e^{tl_u} . To this end, we introduce :

$$\forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \Psi(X) = V_u^{-\frac{1}{2}} e^{t(\mathcal{L}^{(u)} - l_u)} (V_u^{\frac{1}{2}} X V_u^{\frac{1}{2}}) V_u^{-\frac{1}{2}}.$$

Note that $V_u^{-\frac{1}{2}}$ is well defined since V_u is strictly positive. The irreducibility of ϕ involves the positivity improving of Ψ (with Lemma 5.5), and one has that the diamond norm of Ψ is equal to one since $\Psi(I) = I$. Therefore, Theorem 2.2 in [16] implies that 1 is a geometrically simple eigenvalue of Ψ , and this holds for Ψ^* too. By applying Theorem 2.5. of [14], one get that the associated eigenvector X_1 of Ψ^* is positive. Assume by contradiction that 1 is not algebraically simple for Ψ^* . Then the Jordan decomposition shows that there exists X_2 such that $\Psi^*(X_2) = X_1 + X_2$. Besides Ψ^* is trace preserving since $\Psi(I) = I$, therefore $\operatorname{Tr}(X_1) = 0$, then $X_1 = 0$ which is impossible. This implies that e^{tl_u} is algebraically simple for $e^{t\mathcal{L}^{(u)}}$. The analyticity of $u \mapsto l_u$ is a simple application of perturbation theory for matrix eigenvalues (see Chapter II in [17]).

The next lemma describes the link between the moment generating function of $(X_t - X_0)$ and the deformed Lindblad semigroup.

Lemma 5.7. *For all $t \geq 0$ and all $u \in \mathbb{R}^d$, one has*

$$\mathbb{E}\left(e^{u \cdot (X_t - X_0)}\right) = \operatorname{Tr}\left(e^{t\mathcal{L}^{(u)}}(\mathbb{E}[\rho_0])\right).$$

Proof. The idea of the proof consists in rewriting $\mathbb{E}\left(e^{u \cdot (X_t - X_0)}\right)$ with the help of a Dyson expansion. From now, we set $u \in \mathbb{R}^d$ and $f : (\rho, x) \mapsto e^{u \cdot x} \in \mathcal{C}^1$. Since \mathcal{A} is also the generator of $(\rho_t, X_t - X_0)_{t \geq 0}$, the process $(M_t^f)_{t \geq 0}$ defined by

$$M_t^f = f(\rho_t, X_t - X_0) - f(\rho_0, 0) - \int_0^t \mathcal{A}f(\rho_{t_1-}, X_{t_1-} - X_0) dt_1$$

is a local martingale. Due to Lemma 5.4, one has the following upper bound.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^f|\right) &\leq \exp\left((2d)t(e^{|u|} - 1)\right) + 1 \\ &+ (e^{|u|} + 1) \left(\sum_{r=1}^{2d} \|D_r^* D_r\|_{\infty}\right) \exp\left((2d)t(e^{|u|} - 1)\right). \end{aligned}$$

Then $\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^f|\right) < \infty$, for all $t \geq 0$ which implies that $(M_t^f)_{t \geq 0}$ is a true martingale. This leads to

$$\mathbb{E}\left(f(\rho_t, X_t - X_0)\right) = \mathbb{E}\left(f(\rho_0, 0)\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^t \mathcal{A}f(\rho_{t_1}, X_{t_1} - X_0) dt_1\right).$$

This way, we can develop $\mathbb{E}\left(e^{u \cdot (X_t - X_0)}\right)$. For all $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{u \cdot (X_t - X_0)}\right) &= 1 + \mathbb{E}\left(\int_0^t \sum_{r=1}^{2d} \left[e^{u \cdot (X_{t_1} - X_0 + e_r)} - e^{u \cdot (X_{t_1} - X_0)}\right] \text{Tr}(D_r \rho_{t_1} D_r^*) dt_1\right) \\ &= 1 + \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{u \cdot (X_{t_1} - X_0)} \left[\text{Tr}(\mathcal{L}^{(u)}(\rho_{t_1})) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{Tr}(D_0 \rho_{t_1} + \rho_{t_1} D_0^* + \sum_{r=1}^{2d} D_r \rho_{t_1} D_r^*) \right] dt_1\right) \\ &= 1 + \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{u \cdot (X_{t_1} - X_0)} \text{Tr}(\mathcal{L}^{(u)}(\rho_{t_1})) dt_1\right) \\ &= 1 + \int_0^t \text{Tr}\left(\mathcal{L}^{(u)}\left(\mathbb{E}\left[e^{u \cdot (X_{t_1} - X_0)} \rho_{t_1}\right]\right)\right) dt_1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

In a similar way, we want to develop $\mathbb{E}\left[e^{u \cdot (X_{t_1} - X_0)} \rho_{t_1}\right]$. Let $g : (\rho, x) \mapsto e^{u \cdot x} \rho \in \mathcal{C}^1$, the process $(M_t^g)_{t \geq 0}$ defined by

$$M_t^g = g(\rho_t, X_t - X_0) - g(\rho_0, 0) - \int_0^t \mathcal{A}g(\rho_{t_2-}, X_{t_2-} - X_0) dt_2$$

is a local martingale. One can also check that $\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^g|\right) < \infty$ for all $t \geq 0$, which implies that $(M_t^g)_{t \geq 0}$ is a true martingale. And therefore, one has

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{u \cdot (X_{t_1} - X_0)} \rho_{t_1}\right] &= \mathbb{E}(\rho_0) + \mathbb{E}\left(\int_0^{t_1} e^{u \cdot (X_{t_2} - X_0)} \mathcal{F}(\rho_{t_2}) dt_2\right) \\ &\quad + \mathbb{E}\left(\int_0^{t_1} \sum_{r=1}^{2d} \left[e^{u \cdot (X_{t_2} - X_0 + e_r)} \frac{D_r \rho_{t_2} D_r^*}{\text{Tr}(D_r \rho_{t_2} D_r^*)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{u \cdot (X_{t_2} - X_0)} \rho_{t_2} \right] \text{Tr}(D_r \rho_{t_2} D_r^*) dt_2\right) \\ &= \mathbb{E}(\rho_0) + \mathbb{E}\left(\int_0^{t_1} e^{u \cdot (X_{t_2} - X_0)} \left[\text{Tr}(\mathcal{L}^{(u)}(\rho_{t_2})) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \rho_{t_2} \text{Tr}\left(D_0 \rho_{t_2} + \rho_{t_2} D_0^* + \sum_{r=1}^{2d} D_r \rho_{t_2} D_r^*\right) \right] dt_2\right) \\ &= \mathbb{E}(\rho_0) + \int_0^{t_1} \text{Tr}\left(\mathcal{L}^{(u)}\left(\mathbb{E}\left[e^{u \cdot (X_{t_2} - X_0)} \rho_{t_2}\right]\right)\right) dt_2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

We plug (5.18) into (5.17) and we get, for all $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{u \cdot (X_t - X_0)}\right) &= 1 + t \operatorname{Tr}\left(\mathcal{L}^{(u)}\left(\mathbb{E}[\rho_0]\right)\right) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{t_1} \operatorname{Tr}\left(\left(\mathcal{L}^{(u)}\right)^2\left(\mathbb{E}\left[e^{u \cdot (X_{t_2} - X_0)} \rho_{t_2}\right]\right)\right) dt_2 dt_1. \end{aligned}$$

By iterating this procedure, we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{u \cdot (X_t - X_0)}\right) &= \operatorname{Tr}\left(\sum_{k=0}^j \frac{t^k}{k!} \left(\mathcal{L}^{(u)}\right)^k \left(\mathbb{E}[\rho_0]\right)\right) \\ &\quad + \int_{0 < t_j < \dots < t} \operatorname{Tr}\left(\left(\mathcal{L}^{(u)}\right)^{j+1} \left(\mathbb{E}\left[e^{u \cdot (X_{t_{j+1}} - X_0)} \rho_{t_{j+1}}\right]\right)\right) dt_{j+1} \dots dt_1. \end{aligned}$$

for all $j \in \mathbb{N}$. Now it is obvious that the first term converges to $\operatorname{Tr}\left(e^{t\mathcal{L}^{(u)}}\left(\mathbb{E}[\rho_0]\right)\right)$ when j goes to infinity. In order to conclude it remains to prove that the second terms converges to zero. Let us estimate its norm.

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{0 < t_j < \dots < t} \operatorname{Tr}\left(\left(\mathcal{L}^{(u)}\right)^{j+1} \left(\mathbb{E}\left[e^{u \cdot (X_{t_{j+1}} - X_0)} \rho_{t_{j+1}}\right]\right)\right) dt_{j+1} \dots dt_1 \right\|_1 \\ &\leq \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} \left\| \mathcal{L}^{(u)} \right\|_1^{j+1} \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}\left[e^{u \cdot (X_s - X_0)}\right]. \end{aligned}$$

Finally, thanks to Lemma 5.4 and Jensen's inequality,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{0 < t_j < \dots < t} \operatorname{Tr}\left(\left(\mathcal{L}^{(u)}\right)^{j+1} \left(\mathbb{E}\left[e^{u \cdot (X_{t_{j+1}} - X_0)} \rho_{t_{j+1}}\right]\right)\right) dt_{j+1} \dots dt_1 \right\|_1 \\ &\leq \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} \left\| \mathcal{L}^{(u)} \right\|_1^{j+1} e^{(2d)t(e^{|u|}-1)} \end{aligned}$$

which converges to 0 when j goes to infinity.

Now, we can state the main result of this part.

Theorem 5.5. *Let $(\rho_t, X_t)_{t \geq 0}$ the Markov process defined in Proposition 6.2. Assume that ϕ is irreducible. The process $\left(\frac{X_t - X_0}{t}\right)_{t \geq 0}$ satisfies a Large Deviation Principle with a good rate function Λ^* .*

Explicitly there exists a lower semicontinuous mapping $\Lambda^ : \mathbb{R}^d \mapsto [0, +\infty]$ with compact level sets $\{x | \Lambda^*(x) \leq \alpha\}$, such that, for all open set G and all closed set F with $G \subset F \subset \mathbb{R}^d$, one has :*

$$\begin{aligned} - \inf_{x \in G} \Lambda^*(x) &\leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}\left(\frac{X_t - X_0}{t} \in G\right) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}\left(\frac{X_t - X_0}{t} \in F\right) \leq - \inf_{x \in F} \Lambda^*(x). \end{aligned}$$

Moreover, Λ^* can be expressed explicitly,

$$\Lambda^* : x \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}^d} (u \cdot x - l_u)$$

where l_u is defined in Lemma 5.6.

Remark : Moreover, if $\mathbb{E}(e^{u \cdot X_0}) < \infty$ then the LDP holds for $(X_t)_{t \geq 0}$ and not only for $(X_t - X_0)_{t \geq 0}$. In this case, Proposition 5.3 allows us to have the LDP for $(Q_t)_{t \geq 0}$.

Proof. The main tool of the proof is the Gärtner-Ellis Theorem (GET) (see [12]). We focus on the moment generating function which is involved in the GET. Let $t \geq 0$ and $u \in \mathbb{R}^d$, Lemma 5.7 implies that

$$\mathbb{E}(e^{u \cdot (X_t - X_0)}) = \text{Tr}\left(e^{t\mathcal{L}^{(u)}}(\mathbb{E}[\rho_0])\right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \text{Tr}\left(e^{t\mathcal{L}^{(u)}}(\rho^{(0)}(i))\right).$$

Set $0 < \epsilon < t$. Due to Lemma 5.5, $e^{\epsilon\mathcal{L}^{(u)}}$ has the property of positivity improving, therefore $e^{\epsilon\mathcal{L}^{(u)}}(\rho^{(0)}(i))$ is strictly positive for all $i \in \mathbb{Z}^d$.

If we set $r_{u,i} = \inf\left(\text{Sp}\left[e^{\epsilon\mathcal{L}^{(u)}}(\rho^{(0)}(i))\right]\right) > 0$ and $s_{u,i} = \frac{\text{Tr}\left(e^{\epsilon\mathcal{L}^{(u)}}(\rho^{(0)}(i))\right)}{\inf \text{Sp}(V_u)}$ then $\text{Sp}\left[e^{\epsilon\mathcal{L}^{(u)}}(\rho^{(0)}(i)) - r_{u,i}V_u\right] \subset \mathbb{R}^+$ and $\text{Sp}\left[s_{u,i}V_u - e^{\epsilon\mathcal{L}^{(u)}}(\rho^{(0)}(i))\right] \subset \mathbb{R}^+$, and thus

$$r_{u,i}V_u \leq e^{\epsilon\mathcal{L}^{(u)}}(\rho^{(0)}(i)) \leq s_{u,i}V_u.$$

Since $e^{(t-\epsilon)\mathcal{L}^{(u)}}$ preserves the positivity, we get

$$r_{u,i}e^{(t-\epsilon)l_u}V_u \leq e^{t\mathcal{L}^{(u)}}(\rho^{(0)}(i)) \leq s_{u,i}e^{(t-\epsilon)l_u}V_u.$$

Taking the trace, Lemma 5.7 yields

$$e^{(t-\epsilon)l_u} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} r_{u,i} \leq \mathbb{E}(e^{u \cdot (X_t - X_0)}) \leq e^{(t-\epsilon)l_u} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} s_{u,i}.$$

The sums are finite and positive, then we have

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log\left(\mathbb{E}(e^{u \cdot (X_t - X_0)})\right) = l_u.$$

Now define $\Lambda_t : u \mapsto \log\left(\mathbb{E}(e^{u \cdot \frac{X_t - X_0}{t}})\right)$ the logarithm of the moment generating function of $\frac{X_t - X_0}{t}$, and $\Lambda : u \mapsto l_u$. We have shown that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \Lambda_t(tu) = \Lambda(u).$$

Since Λ is analytic (Lemma 5.6), Gärtner-Ellis Theorem can be applied, this proves the LDP and the associated good rate function is

$$\Lambda^* : x \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}^d} (u \cdot x - l_u).$$

5.5 Examples

This section is devoted to the illustration of the CLT and LDP with concrete examples.

Let us first start with two examples in the case $d = 1$. Next, we provide an example for $d = 2$.

In the case $d = 1$, we obtain an open quantum walk on \mathbb{Z} where the walker can stand still some random time, jump to the right and jump to the left. These evolutions are respectively governed by D_0, D_1 and D_2 . We must have :

$$D_0 + D_0^* + D_1^*D_1 + D_2^*D_2 = 0.$$

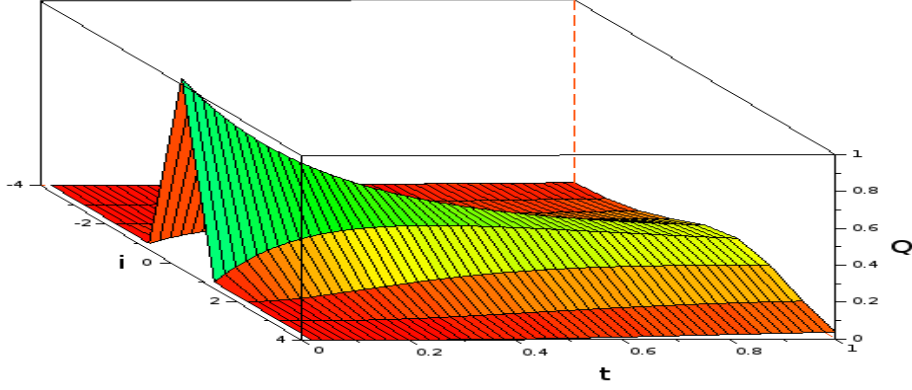


FIGURE 5.1: Evolution of the distribution of the CTOQW starting from a state localized in 0. The i -axis stands for the position $|i\rangle$ on \mathbb{Z} , the t -axis stands for the time and the Q -axis returns the distribution $q_t(i)$.

In the case $d = 2$, we shall need five operators $(D_r)_{r \in \{0, \dots, 4\}}$ satisfying

$$D_0 + D_0^* + \sum_{r=1}^4 D_r^* D_r = 0.$$

Recall that we need to check condition (H_1) for getting the CLT (Theorem 5.3) and we need to check the condition of Definition 6.1 for obtaining LDP (Theorem 5.5).

1. The constraint above is respected in this concrete example :

$$D_0 = -\frac{1}{2}I, \quad D_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

This example falls within the scope of the CLT, in fact $(H1)$ is checked with $\rho_{inv} = \frac{1}{2}I$. We get

$$m = \text{Tr}(D_1 \rho_{inv} D_1^*) - \text{Tr}(D_2 \rho_{inv} D_2^*) = 0; \quad J = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \sigma^2 = \frac{8}{9}.$$

Then the CLT states that

$$\frac{X_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{8}{9}\right),$$

as it is illustrated by Figure 5.1.

One can check that the condition of Definition 6.1 is satisfied which implies that ϕ is irreducible. Hence the process $\left(\frac{X_t - X_0}{t}\right)_{t \geq 0}$ satisfies a LDP with a good rate function $\Lambda^* : x \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}} (u \cdot x - l_u)$ (see Figure 5.2 for numerical computations).

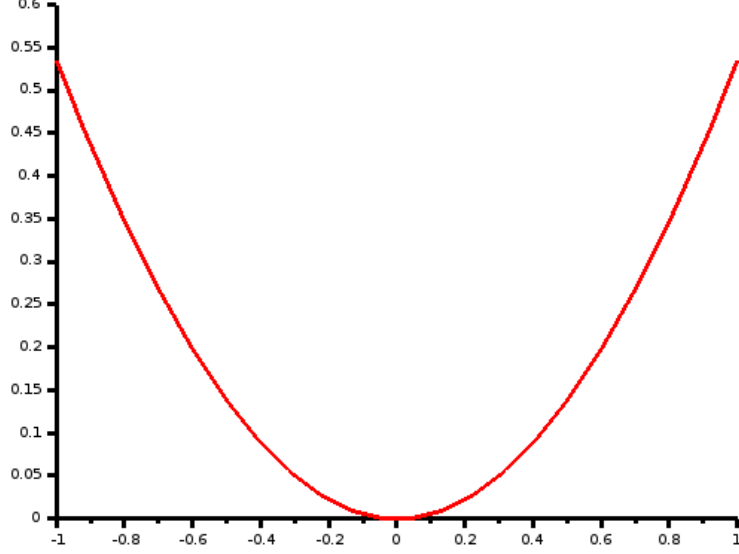


FIGURE 5.2: Λ^* for the first example.

2. For the second example on \mathbb{Z} , we consider the following operators

$$D_0 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Concerning the invariant state, after easy computations, we get

$$\mathcal{L}(\rho) = 0 \iff \rho = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

This implies that (H_1) is satisfied with

$$\rho_{inv} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

We can then compute the following quantities involved in the CLT :

$$m = \text{Tr}(D_1 \rho_{inv} D_1^*) - \text{Tr}(D_2 \rho_{inv} D_2^*) = -\frac{1}{10}; \quad J = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \frac{73}{125}.$$

The CLT yields :

$$\frac{X_t + \frac{t}{10}}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{73}{125}\right).$$

The reader can easily check that the condition of Definition 6.1 is satisfied, then ϕ is irreducible. Hence the process $\left(\frac{X_t - X_0}{t}\right)_{t \geq 0}$ satisfies a LDP with a good rate function $\Lambda^* : x \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}} (u \cdot x - l_u)$. In this case we are able to compute explicitly l_u . Recall that $l_u = \max\{\Re(\lambda), \lambda \in \text{Sp}(\mathcal{L}^{(u)})\}$, where $\mathcal{L}^{(u)}$ is given by :

$$\mathcal{L}^{(u)} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 2(e^u + e^{-u}) \\ 0 & -5 & 2(e^u + \sqrt{2}e^{-u}) & 0 \\ 0 & 2(e^u + \sqrt{2}e^{-u}) & -5 & 0 \\ 2(e^u + 2e^{-u}) & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hence, tedious computations show that $l_u = \frac{1}{32} \left(20 + \sqrt{208 + 64e^{2u} + 128e^{-2u}} \right)$. Figure 5.3 displays the good rate function Λ^* .

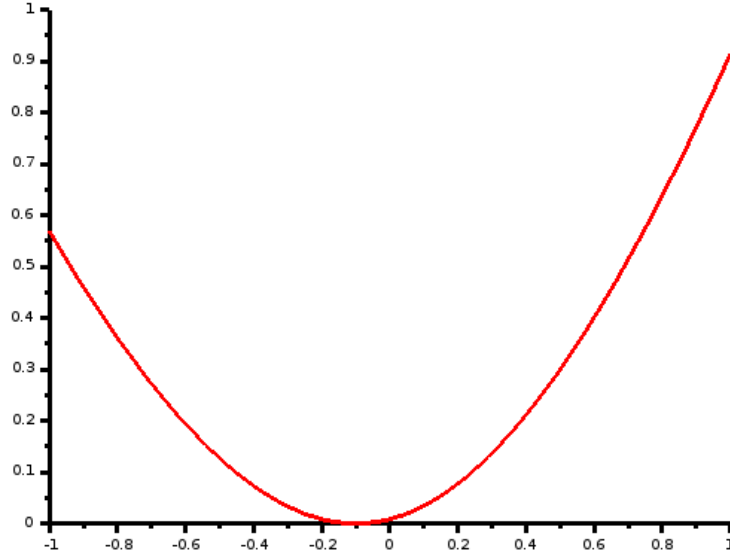


FIGURE 5.3: Λ^* for the second example.

3. Now, we study an example of CTOQWs on \mathbb{Z}^2 . We choose the following five operators :

$$D_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}, \quad D_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

which satisfy

$$D_0 + D_0^* + \sum_{r=1}^4 D_r^* D_r = 0.$$

This case is illustrated numerically by Figure 5.4.

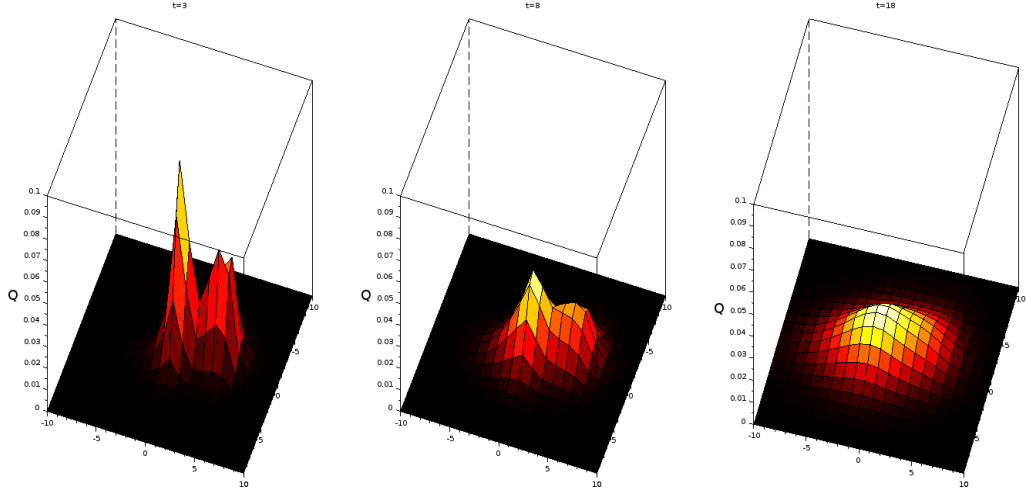


FIGURE 5.4: Distribution of the CTOQW on \mathbb{Z}^2 at time $t = 3, 8$ and 18 .

Condition (H1) is satisfied with $\rho_{inv} = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & 0 \\ 0 & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$. The quantities for the CLT are

$$m = \left(-\frac{1}{22}, -\frac{5}{22} \right), J_1 = \frac{4}{33} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \frac{3}{77} \begin{pmatrix} -13 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} \text{ and } V = \frac{1}{23958} \begin{pmatrix} 10651 & -414 \\ -414 & 14661 \end{pmatrix}.$$

The Central Limit Theorem states then

$$\frac{X_t - mt}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V).$$

Again, the condition of Definition 6.1 is satisfied, then ϕ is irreducible. Therefore the process $\left(\frac{X_t - X_0}{t} \right)_{t \geq 0}$ satisfies a LDP with a good rate function $\Lambda^* : x \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}^d} (u \cdot x - l_u)$. In this case, the matrix $\mathcal{L}^{(u)}$ is given by :

$$\mathcal{L}^{(u)} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4(-6+e^{u_1}+e^{-u_1}+3e^{-u_2}) & 4e^{u_1} & 4e^{u_1} & 4e^{u_1}+3e^{u_2} \\ -4e^{-u_1} & -21+4(e^{u_1}+e^{-u_1}) & 0 & 4e^{u_1}+3e^{u_2} \\ -4e^{-u_1} & 0 & -21+4(e^{u_1}+e^{-u_1}) & 4e^{u_1}+3e^{u_2} \\ 4e^{-u_1} & -4e^{-u_1} & -4e^{-u_1} & -18+4e^{-u_1}+3e^{u_2} \end{pmatrix}.$$

We are not able to obtain an analytic expression of l_u , we then plot a numerical approximation of Λ^* (see Figure 5.5).

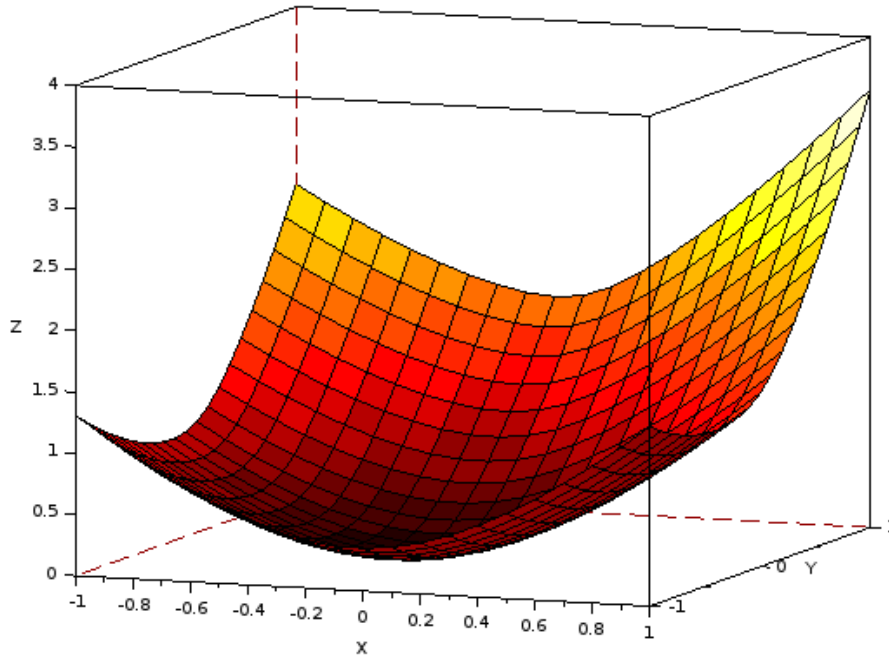


FIGURE 5.5: Λ^* for the last example.

Acknowledgments. The author wishes to thank his PhD advisor C. Pellegrini for suggesting the problem and his sustained help. The author is also grateful to Y. Pautrat for interesting discussions around the topics and examples of the present manuscript. This work is financially supported by the ANR project STOQ : ANR-14-CE25-0003. The author wants to thank the organizers of the summer school "stochastic methods in Quantum Mechanics" in Autrans (2016) where this works have been completed. I thank the referee for helpful comments in improving the exposition.

Bibliographie

- [1] S. Attal, N. Guillotin-Plantard, and C. Sabot. Central limit theorems for open quantum random walks and quantum measurement records. *Ann. Henri Poincaré*, 16(1) :15–43, 2015.
- [2] S. Attal, F. Petruccione, C. Sabot, and I. Sinayskiy. Open quantum random walks. *J. Stat. Phys.*, 147(4) :832–852, 2012.
- [3] A. Barchielli and M. Gregoratti. *Quantum trajectories and measurements in continuous time : the diffusive case*, volume 782. Springer, 2009.
- [4] A. Barchielli and C. Pellegrini. Jump-diffusion unravelling of a non-Markovian generalized Lindblad master equation. *J. Math. Phys.*, 51(11) :112104, 18, 2010.
- [5] M. Bauer, D. Bernard, and A. Tilloy. The open quantum Brownian motions. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, (9) :p09001, 48, 2014.

- [6] H.-P. Breuer. Non-Markovian generalization of the Lindblad theory of open quantum systems. *Phys. Rev. A* (3), 75(2) :022103, 9, 2007.
- [7] R. Carbone and Y. Pautrat. Homogeneous open quantum random walks on a lattice. *J. Stat. Phys.*, 160(5) :1125–1153, 2015.
- [8] R. Carbone and Y. Pautrat. Open quantum random walks : reducibility, period, ergodic properties. *Ann. Henri Poincaré*, 17(1) :99–135, 2016.
- [9] E. Christensen and D. Evans. Cohomology of operator algebras and quantum dynamical semigroups. *J. London Math. Soc.* (2), 20(2) :358–368, 1979.
- [10] I. Crimaldi and L. Pratelli. Convergence results for multivariate martingales. *Stochastic Process. Appl.*, 115(4) :571–577, 2005.
- [11] E. B. Davies. Quantum stochastic processes. II. *Comm. Math. Phys.*, 19 :83–105, 1970.
- [12] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [13] S. Ethier and T. Kurtz. *Markov processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.
- [14] D. Evans and R. Høegh-Krohn. Spectral properties of positive maps on C^* -algebras. *J. London Math. Soc.* (2), 17(2) :345–355, 1978.
- [15] S. Gudder. Quantum Markov chains. *J. Math. Phys.*, 49(7) :072105, 14, 2008.
- [16] V. Jakšić, C.-A. Pillet, and M. Westrich. Entropic fluctuations of quantum dynamical semigroups. *J. Stat. Phys.*, 154(1-2) :153–187, 2014.
- [17] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [18] B. Kümmerer and H. Maassen. A pathwise ergodic theorem for quantum trajectories. *J. Phys. A*, 37(49) :11889–11896, 2004.
- [19] A. Makowski and A. Shwartz. The Poisson equation for countable Markov chains : probabilistic methods and interpretations. In *Handbook of Markov decision processes*, volume 40 of *Internat. Ser. Oper. Res. Management Sci.*, pages 269–303. Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2002.
- [20] A. Marais, I. Sinayskiy, A. Kay, F. Petruccione, and A. Ekert. Decoherence-assisted transport in quantum networks. *New J. Phys.*, 15(January) :013038, 18, 2013.
- [21] C. Pellegrini. Continuous time open quantum random walks and non-Markovian Lindblad master equations. *J. Stat. Phys.*, 154(3) :838–865, 2014.
- [22] C. Pellegrini and F. Petruccione. Non-Markovian quantum repeated interactions and measurements. *J. Phys. A*, 42(42) :425304, 21, 2009.
- [23] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.
- [24] I. Sinayskiy and F. Petruccione. Efficiency of open quantum walk implementation of dissipative quantum computing algorithms. *Quantum Inf. Process.*, 11(5) :1301–1309, 2012.

Chapitre 6

Recurrence and transience of continuous time open quantum walks

In collaboration with Ivan Bardet, Yan Pautrat and Clément Pellegrini

Sommaire

6.1	Continuous time open quantum walks and their associated classical processes	125
6.2	Irreducibility of quantum Markov semigroups	132
6.3	Transience and recurrence of irreducible CTOQW	134

This paper is devoted to the study of continuous-time processes known as continuous-time open quantum walks (CTOQWs). A CTOQW represents the evolution of a quantum particle constrained to move on a discrete graph, but also has internal degrees of freedom modeled by a state (in the quantum mechanical sense), and contain as a special case continuous-time Markov chains on graphs. Recurrence and transience of a vertex are an important notion in the study of Markov chains, and it is known that all vertices must be of the same nature if the Markov chain is irreducible. In the present paper we address the corresponding results in the context of irreducible CTOQWs. Because of the “quantum” internal degrees of freedom, CTOQWs exhibit non standard behavior, and the classification of recurrence and transience properties obeys a “trichotomy” rather than the classical dichotomy. Essential tools in this paper are the so-called “quantum trajectories” which are jump stochastic differential equations which can be associated with CTOQWs.

Introduction

Open quantum walks (OQW) have been developed originally in [2, 3]. They are natural quantum extensions of the classical Markov chain and, in particular, any classical discrete time Markov chain on a finite or countable set can be obtained as a particular case of OQW. Roughly speaking, OQW are random walks on a graph where, at each step, the walker jumps to the next position following a law which depends on an internal degree of freedom, the latter describing a quantum-mechanical state. From a physical point of view, OQW are simple models offering different perspective of applications (see [28, 29]). From a mathematical point of view, their properties can be studied in analogy with those of classical Markov chain. In particular, usual notions such as ergodicity, central limit theorem, irreducibility, period [1, 9, 10, 8, 11, 20] have been investigated. For example, the notions of transience and recurrence have been studied in [5], proper definitions of these notions have been developed in this context and the analogues of transient or recurrent points have been characterized. An interesting feature is that the internal degrees of freedom introduce a source of memory which gives rise to a specific non-Markovian behavior. Recall that, in the classical context ([22]), an exact dichotomy exists for irreducible Markov chains : a point is either recurrent or transient, and the nature of a point can be characterized in terms of the first return time and the number of visits. In contrast, irreducible open quantum walks exhibit three possibilities regarding the behavior of return time and number of visits. In this article, we study the recurrence and transience, as well as their characterizations, for continuous-time versions of OQW.

In the same way that open quantum walks are quantum extensions of discrete-time Markov chains, there exist natural quantum extensions of continuous-time Markov processes. One can point to two different types of continuous-time evolutions with a structure akin to open quantum walks. The first (see [6]) is a natural extension of classical Brownian motion and is called open quantum brownian motion ; it is obtained by considering OQW in the limit where both time and in space are properly rescaled to continuous variables. The other type of such evolution (see [25]) is an analogue of continuous-time Markov chains on a graph, is obtained by rescaling time only, and is called continuous-time open quantum walks (CTOQW). In this article we shall concentrate on the latter.

Roughly speaking CTOQW represents a continuous-time evolution on a graph where a “walker” jumps from node to node at random times. The intensity of jumps depends on the internal degrees of freedom ; the latter is modified by the jump, but also evolves continuously between jumps. In both cases the form of the intensity, as well as the evolution of the internal degrees of freedom at jump times and between them, can be justified from a quantum mechanical model.

As is well-known, in order to study a continuous-time Markov chain, it is sufficient to study the value of the process at the jump times. Indeed, the time before a jump depends exclusively on the location of the walker, and the destination of the jump is independent of that time. As a consequence, the process restricted to the sequence of jump times is a discrete time Markov chain, and all the properties of that discrete time Markov chain such as irreducibility, period, transience, recurrence, are transferred to the continuous-time process. This is not the case for OQW. In particular, a CTOQW restricted to its jump times is not a (discrete-time) open quantum walk. Therefore, the present study of recurrence and transience cannot be directly derived from the results in [5]. Nevertheless, we can still adopt a similar approach and, for instance, we study irreducibility in the sense of irreducibility for quantum dynamical systems (as defined in [12], see also [18]). As in the discrete case, we obtain a trichotomy, in the sense that CTOQW can be classified in three different possible statuses, depending on the properties of the associated return time and number of visits.

The paper is structured as follows. In Section 1, we recall the definition of continuous-

time open quantum walks and in particular we introduce useful classical processes attached to CTOQW. Section 2 is devoted to the notion of irreducibility for CTOQW. In Section 3, we address the question of recurrence and transience and give the classification of CTOQW

6.1 Continuous time open quantum walks and their associated classical processes

This section is devoted to the introduction of continuous-time open quantum walks (CTOQW). In Subsection 6.1.1, we introduce CTOQW as a special instance of quantum Markov semigroups (QMSs) with generators preserving a certain block structure. Subsection 6.1.2 is devoted to the exposition of the Dyson expansion associated to a QMS, which will serve as a tool in all remaining sections. It also allows us to introduce the relevant probability space. Finally, in Subsection 6.1.3 we associate to this stochastic process a Markov process called *quantum trajectory* which has an additional physical interpretation, and that will be useful in its analysis.

6.1.1 Definition of continuous-time open quantum walks

Let V denotes a set of vertices, which may be finite or countably infinite. CTOQWs are quantum analogues of continuous-time Markov semigroups acting on the set $L^\infty(V)$ of bounded functions on V . They are associated to stochastic processes evolving in the composite system

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in V} \mathfrak{h}_i, \quad (6.1)$$

where the \mathfrak{h}_i are separable Hilbert spaces. This decomposition has the following interpretation : the label i in V represents the position of a particle and, when the particle is located at the vertex $i \in V$, its internal state is encoded in the space \mathfrak{h}_i (see below). Thus, in some sense, the space \mathfrak{h}_i describes the internal degrees of freedom of the particle when it is sitting at site $i \in V$. When \mathfrak{h}_i does not depend on i , that is if $\mathfrak{h}_i \simeq \mathfrak{h}$, for all $i \in V$, one has the identification $\mathcal{H} \simeq \mathfrak{h} \otimes \ell^2(V)$ and then it is natural to write $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h} \otimes |i\rangle$ (we use here Dirac's notation where the *ket* $|i\rangle$ represents the i -th vector in the canonical basis of $\ell^\infty(V)$, the *bra* $\langle i|$ for the associated linear form, and $|i\rangle\langle j|$ for the linear map $f \mapsto \langle j|f\rangle |i\rangle$). We will adopt the notation $\mathfrak{h}_i \otimes |i\rangle$ to denote \mathfrak{h}_i in the general case (i.e. when \mathfrak{h}_i depends on i) to emphasize the position of the particle, using the identification $\mathfrak{h}_i \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{h}_i$. We thus write :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in V} \mathfrak{h}_i \otimes |i\rangle. \quad (6.2)$$

Last, we denote by $\mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ the two-sided ideal of trace-class operators on a given Hilbert space \mathcal{K} and by $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ the space of density matrices on \mathcal{K} , defined by :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{K}} = \{\rho \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K}) \mid \rho^* = \rho, \rho \geq 0, \text{Tr}(\rho) = 1\}.$$

A *faithful* density matrix is an invertible element of $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$, which is therefore a trace-class and positive-definite operator. Following quantum mechanical fashion, we will use the word “state” interchangeably with “density matrix”.

We recall that a quantum Markov semigroup (QMS) on $\mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ is a semigroup $\mathcal{T} := (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ of completely positive maps on $\mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ that preserve the trace. The QMS is said to be uniformly continuous if $\lim_{t \rightarrow 0} \|\mathcal{T}_t - \text{Id}\| = 0$ for the operator norm on $\mathcal{B}(\mathcal{K})$. It is then known (see [21]) that the semigroup $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ has a generator $\mathcal{L} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathcal{T}_t - \text{Id})/t$ which is a bounded operator on $\mathcal{I}_1(\mathcal{K})$, called the Lindbladian, and Lindblad's Theorem

characterizes the structure of such generators. One consequently has $\mathcal{T}_t = e^{t\mathcal{L}}$ for all $t \geq 0$, where the exponential is understood as the limit of the norm-convergent series.

Continuous-time open quantum walks are particular instances of uniformly continuous QMS on $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, for which the Lindbladian has a specific form. To make this more precise, we define the following set of block-diagonal density matrices of \mathcal{H} :

$$\mathcal{D} = \left\{ \mu \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) ; \mu = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i| \right\}.$$

In particular, for $\mu \in \mathcal{D}$ with the above definition, one has $\rho(i) \in \mathcal{I}_1(\mathfrak{h}_i)$, $\rho(i) \geq 0$ and $\sum_{i \in V} \text{Tr}(\rho(i)) = 1$. In the sequel, we use the usual notations $[X, Y] = XY - YX$ and $\{X, Y\} = XY + YX$, which stand respectively for the commutator and anticommutator of two operators $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Definition 6.1. Let \mathcal{H} be a Hilbert space that admits a decomposition (6.1). A *continuous-time open quantum walk* is a uniformly continuous quantum Markov semigroup on $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ such that its Lindbladian \mathcal{L} can be written :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \\ \mu &\mapsto -i[H, \mu] + \sum_{i, j \in V} \mathbb{1}_{i \neq j} (S_i^j \mu S_i^{j*} - \frac{1}{2} \{S_i^{j*} S_i^j, \mu\}), \end{aligned} \quad (6.3)$$

where H and $(S_i^j)_{i, j}$ are bounded operators on \mathcal{H} that take the following form :

- $H = \sum_{i \in V} H_i \otimes |i\rangle\langle i|$, with H_i bounded self-adjoint operators on \mathfrak{h}_i , i in V ;
- for every $i \neq j \in V$, S_i^j is a bounded operator on \mathcal{H} with support included in \mathfrak{h}_i and with range included in \mathfrak{h}_j , and such that the sum $\sum_{i, j \in V} S_i^{j*} S_i^j$ converges in the strong sense. Consistently with our notation, we can write $S_i^j = R_i^j \otimes |j\rangle\langle i|$ for bounded operators $R_i^j \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j)$.

We will say that the open quantum walk is *semifinite* if $\dim \mathfrak{h}_i < \infty$ for all $i \in V$.

From now on we will use the convention that $S_i^i = 0$, $R_i^i = 0$ for any $i \in V$. As one can immediately check, the Lindbladian \mathcal{L} of a CTOQW preserves the set \mathcal{D} . More precisely, for $\mu = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i| \in \mathcal{D}$, denoting $\mathcal{T}_t(\mu) =: \sum_{i \in V} \rho_t(i) \otimes |i\rangle\langle i|$ for all $t \geq 0$, we have for all $i \in V$

$$\frac{d}{dt} \rho_t(i) = -i[H_i, \rho_t(i)] + \sum_{j \in V} (R_j^i \rho_t(j) R_j^{i*} - \frac{1}{2} \{R_j^{i*} R_j^i, \rho_t(i)\}).$$

6.1.2 Dyson expansion and associated probability space

In this article, our main focus is a stochastic process $(X_t)_{t \geq 0}$ that informally represents the position of a particle or a walker constrained to move on V . In order to rigorously define this process and its associated probability space, we need to introduce the *Dyson expansion* associated to a CTOQW. In particular, this allows to define a probability space on the possible trajectories of the walker. We will recall the result for general QMS as we will use it in the next section. The application to CTOQW is described shortly afterwards.

Let $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ be a uniformly continuous QMS with Lindbladian \mathcal{L} on $\mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ for some separable Hilbert space \mathcal{K} . By virtue of Lindblad's Theorem [21], there exists a bounded self-adjoint operator $H \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ and bounded operators L_i on \mathcal{K} ($i \in I$) such that for all $\mu \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$,

$$\mathcal{L}(\mu) = -i[H, \mu] + \sum_{i \in I} (L_i \mu L_i^* - \frac{1}{2} \{L_i L_i^*, \mu\}),$$

where I is a finite or countable set and where the series is strongly convergent. The first step is to give an alternative form for the Lindbladian. First introduce

$$G := -iH - \frac{1}{2} \sum_{i \in I} L_i^* L_i,$$

so that for any $\mu \in \mathcal{D}$,

$$\mathcal{L}(\mu) = G\mu + \mu G^* + \sum_{i \in I} L_i \mu L_i^*. \quad (6.4)$$

Remark that $G + G^* + \sum_{i \in I} L_i^* L_i = 0$, so that (6.4) is the general form of the generator of a QMS, as given by Lindblad [21]. The operator $-(G + G^*)$ is positive semidefinite and $t \mapsto e^{tG}$ defines a one-parameter semigroup of contractions on \mathcal{K} by a trivial application of the Lumer-Phillips theorem (see e.g. Corollary 3.17 in [15]). We are now ready to give the Dyson expansion of the QMS.

Proposition 6.1. Let $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ be a QMS with Lindbladian \mathcal{L} as given above. For any initial density matrix $\mu \in \mathcal{S}_{\mathcal{K}}$, one has

$$\mathcal{T}_t(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n \in I} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} \zeta_t(\xi) \mu \zeta_t(\xi)^* dt_1 \cdots dt_n, \quad (6.5)$$

where $\zeta_t(\xi) = e^{(t-t_n)G} L_{i_n} \cdots L_{i_1} e^{t_1 G}$ for $\xi = (i_1, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n)$.

We now turn to applying this to CTOQW. Due to the block decomposition of H and of the S_j^i , one can write $G = \sum_{i \in V} G_i \otimes |i\rangle\langle i|$, where

$$G_i = -iH_i - \frac{1}{2} \sum_{j \in V \setminus \{i\}} R_i^{j*} R_i^j. \quad (6.6)$$

From Proposition 6.1 we then get the following expression for the Lindbladian : for all $\mu = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i|$ in \mathcal{D} ,

$$\mathcal{L}(\mu) = \sum_{i \in V} \left(G_i \rho(i) + \rho(i) G_i^* + \sum_{j \neq i \in V} R_j^i \rho(j) R_j^{i*} \right) \otimes |i\rangle\langle i|. \quad (6.7)$$

Corollary 6.1. Let $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ be a CTOQW with Lindbladian \mathcal{L} given by (6.7). For any initial density matrix $\mu \in \mathcal{D}$, one has

$$\mathcal{T}_t(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_0, \dots, i_n \in V} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} T_t(\xi) \rho(i_0) T_t(\xi)^* dt_1 \cdots dt_n \otimes |i_n\rangle\langle i_n|, \quad (6.8)$$

where, for $\xi = (i_0, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n)$ with $i_0, \dots, i_n \in V^{n+1}$ and $0 < t_1 < \dots < t_n < t$,

$$T_t(\xi) := e^{(t-t_n)G_{i_n}} R_{i_n}^{i_{n-1}} e^{(t_n-t_{n-1})G_{i_{n-1}}} \cdots e^{(t_2-t_1)G_{i_1}} R_{i_1}^{i_0} e^{t_1 G_{i_0}}. \quad (6.9)$$

Note the small discrepancy between $\xi = (i_1, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n)$ in (6.5) and $\xi = (i_0, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n)$ in (6.8), where the additional index i_0 is due to the decomposition of μ .

Remark. Equation (6.5) is also called an unravelling of the QMS. It was first introduced in [13, 30], with a heuristic interpretation as the average result of trajectory $\xi = (i_0, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n)$ on the state μ , averaged over all possible such trajectories. We discuss later connections with an operational interpretation of $T_t(\xi) \rho(i_0) T_t(\xi)^*$ in Remark 6.1.4.

The decomposition described in (6.9) will allow us to give a rigorous definition of the probability space associated to the evolution of the particle on V . The goal is to introduce the probability measure \mathbb{P}_μ that models the law of the position of the particle, when the initial density matrix is $\mu \in \mathcal{D}$. The following is inspired by [4, 7, 19].

First define the set of all possible trajectories up to time $t \in [0, \infty]$ as $\Xi_t := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \Xi_t^{(n)}$, where $\Xi_t^{(n)}$ is the set of trajectories on V up to time t comprising n jumps :

$$\Xi_t^{(n)} := \{\xi = (i_0, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n) \in V^{n+1} \times \mathbb{R}^n, 0 < t_1 < \dots < t_n < t\}.$$

For $t \in \mathbb{R}_+$, the set $\Xi_t^{(n)}$ is equipped with the σ -algebra $\Sigma_t^{(n)}$ and with the measure $\nu_t^{(n)}$, which is induced by the map

$$I_n : (V^{n+1} \times [0, t]^n, \mathcal{P}(V^{n+1}) \times \mathcal{B}([0, t]^n), \delta^{n+1} \times \frac{1}{n!} \lambda_n) \rightarrow (\Xi_t^{(n)}, \Sigma_t^{(n)}, \nu_t^{(n)}), \\ (i_0, \dots, i_n; s_1, \dots, s_n) \mapsto (i_0, \dots, i_n; s_{\min}, \dots, s_{\max})$$

where δ is the counting measure on V , $\mathcal{B}([0, t]^n)$ is the Borel σ -algebra on $[0, t]^n$ and λ_n is the Lebesgue measure on $\mathcal{B}([0, t]^n)$ for all $n \geq 0$. These measures are σ -finite and this allows us to apply Carathéodory's extension Theorem. We first define the σ -algebra $\Sigma_t := \sigma(\Sigma_t^{(n)}, n \in \mathbb{N})$ and the measure ν_t on Ξ_t such that $\nu_t = \nu_t^{(n)}$ on $\Xi_t^{(n)}$. For a given $\mu = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i|$ in \mathcal{D} , one can then define the probability measure \mathbb{P}_μ^t on (Ξ_t, Σ_t) such that, for all $E \in \Sigma_t$,

$$\mathbb{P}_\mu^t(E) := \int_E \text{Tr}(T_t(\xi) \mu T_t(\xi)^*) d\nu^t(\xi) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_0, \dots, i_n \in V} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} \mathbf{1}_{\xi \in E} \text{Tr}(T_t(\xi) \rho(i_0) T_t(\xi)^*) dt_1 \cdots dt_n, \quad (6.10)$$

where $\xi = (i_0, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n)$ and where $T_t(\xi)$ is defined by Equation (6.9). The measure \mathbb{P}_μ^t is indeed a probability measure as one can check that $\mathbb{P}_\mu^t(\Xi_t) = \text{Tr}(e^{t\mathcal{L}}(\mu)) = 1$. The family of probability measures $(\mathbb{P}_\mu^t)_{t \geq 0}$ is consistent, as (6.10) and (6.9) show that

$$\mathbb{P}_\mu^{t+s}(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_0, \dots, i_n \in V} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} \mathbf{1}_{\xi \in E} \text{Tr}(e^{s\mathcal{L}}(T_t(\xi) \rho(i_0) T_t(\xi)^*)) dt_1 \cdots dt_n = \mathbb{P}_\mu^t(E)$$

for all $t, s \geq 0$ and $E \in \Sigma_t$. Hence, Kolmogorov's consistency Theorem allows us to extend $(\mathbb{P}_\mu^t)_{t \geq 0}$ to a probability measure \mathbb{P}_μ on $(\Xi_\infty, \Sigma_\infty)$ where $\Sigma_\infty = \sigma(\Sigma_t, t \in \mathbb{R}_+)$.

In most of our discussions below we will specialize to the case where μ is of the form $\mu = \rho \otimes |i\rangle\langle i|$. In such a case, we denote by $\mathbb{P}_{i,\rho}$ the probability \mathbb{P}_μ .

6.1.3 Quantum trajectories associated to CTOQW

Quantum trajectories are another convenient way to describe the distribution of the position process $(X_t)_{t \geq 0}$ associated to the CTOQW. Actually, the combination of quantum trajectories and of the Dyson expansion will be essential tools for the main result of this article. Formally speaking, quantum trajectories model the evolution of the state when a continuous measurement of the position of the particle is performed. The state at time t can be described by a pair (X_t, ρ_t) with $X_t \in V$ the position of the particle at time t (as recorded by the measuring device) and $\rho_t \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ the density matrix describing the internal degrees of freedom, given by the wave function collapse postulate and thus constrained to have support on \mathfrak{h}_i alone. The stochastic process $(X_t, \rho_t)_{t \geq 0}$ is then a Markov process, and this will allow us to use the standard machinery for such processes. However, their

rigorous description is less straightforward than the one for discrete time OQWs. It makes use of stochastic differential equations driven by jump processes. We refer to [25] for the justification of the below description and for the link between discrete and continuous-time models. Remark that we denote by the same symbol the stochastic process $(X_t)_{t \geq 0}$ appearing in this and the previous section. This will be justified in Remark 6.1.4 below.

In order to present the stochastic differential equation satisfied by the pair (X_t, ρ_t) we need a usual filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$, where we consider independent Poisson point processes $N^{i,j}, i, j \in V, i \neq j$ on \mathbb{R}^2 . These Poisson point processes will govern the jump from site i to site j on the graph V .

Definition 6.2. Let $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ be a CTOQW with Lindbladian \mathcal{L} and let $\mu = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i|$ be an initial density matrix in \mathcal{D} . The quantum trajectory describing the indirect measurement of the position of the CTOQW is the Markov process $(\mu_t)_{t \geq 0}$ taking values in the set \mathcal{D} such that

$$\mu_0 = \rho_0 \otimes |X_0\rangle\langle X_0|,$$

where X_0 and ρ_0 are random with distribution

$$\mathbb{P}\left(\left(X_0, \rho_0\right) = \left(i, \frac{\rho(i)}{\text{Tr}(\rho(i))}\right)\right) = \text{Tr}(\rho(i)) \text{ for all } i \in V$$

and such that $\mu_t =: \rho_t \otimes |X_t\rangle\langle X_t|$ satisfies for all $t \geq 0$ the following stochastic differential equation :

$$\mu_t = \mu_0 + \int_0^t \mathcal{M}(\mu_{s-}) ds + \sum_{i \neq j} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{S_i^j \mu_{s-} S_i^{j*}}{\text{Tr}(S_i^j \mu_{s-} S_i^{j*})} - \mu_{s-} \right) \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(S_i^j \mu_{s-} S_i^{j*})} N^{i,j}(dy, ds) \quad (6.11)$$

where

$$\mathcal{M}(\mu) = \mathcal{L}(\mu) - \sum_{i \neq j} (S_i^j \mu S_i^{j*} - \mu \text{Tr}(S_i^j \mu S_i^{j*}))$$

so that for $\mu = \sum_i \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i| \in \mathcal{D}$,

$$\mathcal{M}(\mu) = \sum_i (G_i \rho(i) + \rho(i) G_i^* - \rho(i) \text{Tr}(G_i \rho(i) + \rho(i) G_i^*)) \otimes |i\rangle\langle i|.$$

Remark. An interesting fact has been pointed out in [25] : continuous-time classical Markov chains can be realized within this setup by considering $\mathfrak{h}_i \simeq \mathbb{C}$ for all $i \in V$.

Let us briefly describe the evolution of the solution $(\mu_t)_t$ of (6.11). Assume that $X_0 = i_0$ for some $i_0 \in V$ and consider ρ_0 a state on \mathfrak{h}_{i_0} . We then consider the solution, for all $t \geq 0$,

$$\eta_t = \rho_0 + \int_0^t (G_{i_0} \eta_s + \eta_s G_{i_0}^* - \eta_s \text{Tr}(G_{i_0} \eta_s + \eta_s G_{i_0}^*)) ds. \quad (6.12)$$

We stress the fact that the solution of this equation takes value in the set of states of \mathfrak{h}_{i_0} (this nontrivial fact is well known in the theory of quantum trajectories, see [24] for further details). Now let us define the first jump time. To this end we introduce for $j \neq i_0$

$$T_1^j = \inf \{t \geq 0; N^{i_0,j}(\{u, y | 0 \leq u \leq t, 0 \leq y \leq \text{Tr}(R_{i_0}^j \eta_u R_{i_0}^{j*})\}) \geq 1\}.$$

The random variables T_1^j are nonatomic, and mutually independent. Therefore, if we let $T_1 = \inf_{j \neq i_0} \{T_1^j\}$ then there exists a unique $j \in V$ such that $T_1^j = T_1$. In addition,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 \leq \varepsilon) &\leq \sum_{j \neq i_0} \mathbb{P}(T_1^j \leq \varepsilon) \\
&= \sum_{j \neq i_0} (1 - e^{-\int_0^\varepsilon \text{Tr}(R_{i_0}^j \eta_u R_{i_0}^{j*}) du}) \\
&\leq \sum_{j \neq i_0} \int_0^\varepsilon \text{Tr}(R_{i_0}^j \eta_u R_{i_0}^{j*}) du \\
&\leq \varepsilon \sum_{j \neq i_0} \|R_{i_0}^j R_{i_0}^{j*}\|
\end{aligned} \tag{6.13}$$

where the sums are over all j in V with $j \neq i_0$. Now remark that our assumption that $\sum_{i,j} S_i^{j*} S_i^j$ converges strongly implies that the sum $\sum_{j \neq i} \|R_i^{j*} R_i^j\|$ is finite for all i in V , so that (6.13) implies $\mathbb{P}(T_1 > 0) = 1$. On $[0, T_1]$ we then define the solution $(X_t, \rho_t)_t$ as

$$(X_t, \rho_t) = (i_0, \eta_t) \text{ for } t \in [0, T_1) \quad \text{and} \quad (X_{T_1}, \rho_{T_1}) = (j, \frac{R_i^j \eta_{T_1} - R_i^{j*}}{\text{Tr}(R_i^j \eta_{T_1} - R_i^{j*})}).$$

We then solve

$$\eta_t = \rho_{T_1} + \int_0^t (G_j \eta_s + \eta_s G_j^* - \eta_s \text{Tr}(G_j \eta_s + \eta_s G_j^*)) ds, \tag{6.14}$$

and define a new jumping time T_2 as above. By this procedure we define an increasing sequence $(T_n)_n$ of jumping times. We show that $T := \lim_n T_n = +\infty$ almost surely : we introduce

$$N_t = \sum_{i \neq j} \left(\int_0^{t \wedge T} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(S_i^j \mu_s - S_i^{j*})} N^{i,j}(dy, ds) \right)$$

(where the sum is over all i, j with $i \neq j$) which counts the number of jumps before t . In particular $N_{T_p} = p$ for all $p \in \mathbb{N}$. Now from the properties of the Poisson processes we have for all $p \in \mathbb{N}$ and all $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(N_{T_p \wedge m}) \leq \mathbb{E}(N_m) = \sum_{i \neq j} \mathbb{E} \left(\int_0^{m \wedge T} \text{Tr}(S_i^j \mu_s - S_i^{j*}) ds \right) \leq m \sum_{i \neq j} \|S_i^{j*} S_i^j\|.$$

Denoting $C = \sum_{i \neq j} \|S_i^{j*} S_i^j\|$ (which is finite) the inequality $p \mathbb{P}(T_p \leq m) \leq \mathbb{E}(N_{T_p \wedge m})$ implies

$$\mathbb{P}(T_p \leq m) \leq \frac{m}{p} C.$$

This implies that $\mathbb{P}(\lim_n T_n \leq m) = 0$ for all $m \in \mathbb{N}$ so that $\lim_n T_n = +\infty$ almost surely. Therefore, the above considerations define (X_t, ρ_t) for all $t \in \mathbb{R}_+$.

6.1.4 Connection between Dyson expansion and quantum trajectories

The connection between the process (X_t, ρ_t) defined in this section and the Dyson expansion has been deeply studied in the literature. We do not give all the details of this construction and instead refer to [4, 7] for a complete and rigorous justification. The main point is that the process (X_t, ρ_t) defined in Section 6.1.3 can be constructed explicitly on the space $(\Xi^\infty, \Sigma^\infty, \mathbb{P})$, as we now detail.

Recall the interpretation of $\xi = (i_0, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n)$ as the trajectory of a particle, initially at i_0 and jumping to i_k at time t_k . First, on $(\Xi^\infty, \Sigma^\infty, \mathbb{P})$ define the random variable $\tilde{N}_t^{i,j}$ by

$$\tilde{N}_t^{i,j}(\xi) = \text{card}\{k = 0, \dots, n-1 \mid (i_k, i_{k+1}) = (i, j)\}$$

for $\xi = (i_0, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n)$ as above. Now, let

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t(\xi) &= \begin{cases} i_k & \text{if } t_k \leq t < t_{k+1} \\ i_n & \text{if } t_n \leq t. \end{cases} \\ \tilde{\rho}_t(\xi) &= \frac{T_t(\xi)\rho_0 T_t(\xi)^*}{\text{Tr}(T_t(\xi)\rho_0 T_t(\xi)^*)} \end{aligned} \quad (6.15)$$

(recall that $T_t(\xi)$ is defined in (6.9)) and

$$\tilde{\mu}_t = \tilde{\rho}_t \otimes |\tilde{X}_t\rangle\langle\tilde{X}_t|.$$

Differentiating (6.15), one can show that the process $(\tilde{\mu}_t)_t$ satisfies

$$d\tilde{\mu}_t = \mathcal{M}(\tilde{\mu}_{t-}) dt + \sum_{i \neq j} \left(\frac{S_i^j \tilde{\mu}_{t-} S_i^{j*}}{\text{Tr}(S_i^j \tilde{\mu}_{t-} S_i^{j*})} - \tilde{\mu}_{t-} \right) d\tilde{N}^{i,j}(t). \quad (6.16)$$

It is proved in [4] that the processes

$$(\tilde{N}_t^{i,j})_t \quad \text{and} \quad \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 < y < \text{Tr}(S_i^j \mu_{s-} S_i^{j*})} N^{i,j}(dy, ds) \right)_t$$

(for $(\rho_t)_t$ and $N^{i,j}$ defined in the previous section) have the same distribution. Therefore, $(\tilde{\mu}_t)_t$ and $(\mu_t)_t$ have the same distribution. For this reason, we will denote the random variables $\tilde{\eta}_t, \tilde{X}_t, \tilde{\rho}_t$ by η_t, X_t, ρ_t , i.e. we identify the random variables obtained by the construction in Section 6.1.3 and those defined by (6.15). In addition, from expression (6.15) for ρ_t, X_t we recover immediately that $\mu_t = \rho_t \otimes |X_t\rangle\langle X_t|$ satisfies

$$\mathbb{E}_{\mu_0}(\mu_t) = \mathcal{T}_t(\mu_0)$$

where \mathbb{E}_{μ_0} is the expectation with respect to the probability \mathbb{P}_{μ_0} defined in Section 6.1.2. This identity shows that the quantum Markov semigroup $(\mathcal{T}_t)_t$ plays for the process $(X_t, \rho_t)_t$ the same role as the Markov semigroup in the classical case. Because a notion of irreducibility is naturally associated to such a semigroup (see [12, 17] for general considerations on the irreducibility of Lindbladians), this will allow us to associate a notion of irreducibility to a continuous-time open quantum walk.

Now note that expressions (6.15) give an interpretation of X_t and ρ_t in terms of quantum measurement. Indeed, one can see the operator $T_t(\xi)$ for $\xi = (i_0, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n)$ (or, rather, the map $\rho \mapsto T_t(\xi)\rho T_t(\xi)^*$) as describing the effect of the trajectory where jumps (up to time t) occur at times t_1, \dots, t_n and i_0, \dots, i_n is the sequence of updated positions : as long as the particle sits at $i_k \in V$, the evolution of its internal degrees of freedom is given by the semigroup of contraction $(e^{tG_{i_k}})_{t \geq 0}$ and, as the particle jumps to i_{k+1} , it undergoes an instantaneous transformation governed by $R_{i_k}^{i_{k+1}}$ (this $T_t(\xi)$ as the analogue for continuous-time OQW of the operator L_π of [5, 10]). Therefore, the expression for $\rho_t(\xi)$ in (6.15) encodes the effect of the reduction postulate, or postulate of the collapse of the wave function, on the state of a particle initially at i_0 and with internal state ρ_0 .

This rigorous connection of the unravelling (6.9) to (indirect) measurement was first described in [4] (see also [23, 24], as well as [14] for a connection to two-time measurement statistics).

To summarize this section and the preceding one, we have defined a Markov process $(\mu_t)_t$ as $\mu_t = \rho_t \otimes |X_t\rangle\langle X_t|$, where $X_t \in V$ and $\rho_t \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_{X_t}}$, of which the law can be computed in two ways : either by the Dyson expansion of the CTOQW as in (6.10) or by use of the stochastic differential equation (6.11).

6.2 Irreducibility of quantum Markov semigroups

In this section, we state the equivalence between different notions of irreducibility for general quantum Markov semigroup. Our main motivation is the fact that we could not find a complete proof in the case of an infinite-dimensional Hilbert space, as is required e.g. for CTOQW with infinite V . We then discuss irreducibility for CTOQW.

Theorem 6.1. *Let $\mathcal{T} := (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ be a quantum Markov semigroup with Lindbladian*

$$\mathcal{L}(\mu) = G\mu + \mu G^* + \sum_{i \in I} L_i \mu L_i^*. \quad (6.17)$$

The following assertions are equivalent :

1. \mathcal{T} is positivity improving : for all $A \in \mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ with $A \geq 0$ and $A \neq 0$, there exists $t > 0$ such that $e^{t\mathcal{L}}(A) > 0$.
2. For any $\varphi \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$, the set $\mathbb{C}[\mathcal{L}]\varphi$ is dense in \mathcal{K} where $\mathbb{C}[\mathcal{L}]$ is the set of polynomials in e^{tG} for $t > 0$ and in L_i for $i \in I$.
3. For any $\varphi \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$, the set $\mathbb{C}[G, L]\varphi$ is dense in \mathcal{K} where $\mathbb{C}[G, L]$ is the set of polynomials in G and in the L_i for $i \in I$.
4. \mathcal{T} is irreducible, i.e. there exists $t > 0$ such that \mathcal{T}_t admits no non-trivial projection $P \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ with $\mathcal{T}_t(P\mathcal{I}_1(\mathcal{K})P) \subset P\mathcal{I}_1(\mathcal{K})P$.

From now on, any quantum Markov semigroup which satisfies any one of the equivalent statements of Theorem 6.1 is simply called *irreducible*.

Remark. Positivity improving maps are also called primitive. We therefore call *primitivity* the property of being positivity improving. Remark also that one can replace “there exists $t > 0$ ” by “for all $t > 0$ ” in assertions 1. and 4. above to get another equivalent formulation of irreducibility and primitivity. This follows from the observation that assertion 3. does not depend of t .

Proof. We first prove the equivalence 1. \Leftrightarrow 2. Note that 1. holds if and only if for every $\varphi_0 \neq 0$, there exists $t_0 > 0$ such that $\langle \varphi, e^{t\mathcal{L}}(|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|)\varphi \rangle > 0$ for all $\varphi \neq 0$. Now remark that from Equation (6.8),

$$\langle \varphi, e^{t\mathcal{L}}(|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|)\varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_0, \dots, i_n \in I} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} |\langle \varphi, \zeta_t(\xi)\varphi_0 \rangle|^2 dt_1 \cdots dt_n \quad (6.18)$$

where $\xi = (i_1, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n)$. Assume 1. and fix $\varphi_0 \neq 0$. If for some $t \geq 0$, the left-hand-side of (6.18) is positive for any $\varphi \neq 0$, then for any such $\varphi \neq 0$ there exists ξ with $\langle \varphi, \zeta_t(\xi)\varphi_0 \rangle \neq 0$. Since $\zeta_t(\xi)\varphi_0 \in \mathbb{C}[\mathcal{L}]\varphi_0$ and the latter is a vector space, this implies that $\mathbb{C}[\mathcal{L}]\varphi_0$ is dense in \mathcal{K} . Now assume 2. and fix $\varphi_0 \neq 0$. Since $\mathbb{C}[\mathcal{L}]\varphi_0$ is dense in \mathcal{K} , for any $\varphi \neq 0$ there exists an element $\psi = e^{s_n G} L_{i_n} \cdots L_{i_1} e^{s_1 G} \varphi_0$ such that $\langle \varphi, \psi \rangle \neq 0$. However, for $t \geq s_1 + \dots + s_n$, ψ is of the form $\zeta_t(\xi)\varphi_0$ for some $\xi = (i_1, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n)$. By continuity of ζ in t_1, \dots, t_n , the right-hand side of (6.18) is positive and this proves 1.

To prove the equivalence 2. \Leftrightarrow 3., we use the fact that $G = \lim_{t \rightarrow 0} (e^{tG} - \text{Id})/t$, which implies that for any $\varphi \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{C}[G, L]\varphi \subset \overline{\mathbb{C}[\mathcal{L}]\varphi} \subset \overline{\mathbb{C}[\mathcal{L}]\varphi}.$$

Since $e^{tG} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n t^k G^k / k!$, for any $\varphi \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ we also have

$$\mathbb{C}[\mathcal{L}]\varphi \subset \overline{\mathbb{C}[G, L]\varphi} \subset \overline{\mathbb{C}[G, L]\varphi}.$$

Therefore, for any $\varphi \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{C}[\mathcal{L}]\varphi \text{ is dense in } \mathcal{K} \iff \mathbb{C}[G, L]\varphi \text{ is dense in } \mathcal{K}. \quad (6.19)$$

The implication 1. \Rightarrow 4. is obvious. It remains to prove that 4. \Rightarrow 2.. To this end, suppose that \mathcal{T} is irreducible. Let $\varphi \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ and denote by P the orthogonal projection on $\overline{\mathbb{C}[\mathcal{L}]\varphi}$. The goal is to prove that $P = \text{Id}$. For all $\psi \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} e^{t\mathcal{L}}(P|\psi\rangle\langle\psi|P) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_0, \dots, i_n \in I} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} \zeta_t(\xi) P|\psi\rangle\langle\psi|P \zeta_t(\xi)^* dt_1 \cdots dt_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_0, \dots, i_n \in I} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} |\zeta_t(\xi) P\psi\rangle\langle\zeta_t(\xi) P\psi| dt_1 \cdots dt_n, \end{aligned}$$

Since $\zeta_t(\xi) \in \mathbb{C}[\mathcal{L}]$ and $P\psi \in \overline{\mathbb{C}[\mathcal{L}]\varphi}$, we have $\zeta_t(\xi)P\psi \in \overline{\mathbb{C}[\mathcal{L}]\varphi}$ and thus

$$\mathcal{T}_t(P|\psi\rangle\langle\psi|P) = P \mathcal{T}_t(P|\psi\rangle\langle\psi|P) P.$$

The projection P being subharmonic for \mathcal{T}_t which is irreducible by assumption, P is trivial. As it is non-zero, $P = \text{Id}$. Since P is the orthogonal projection on $\overline{\mathbb{C}[\mathcal{L}]\varphi}$, this shows that $\mathbb{C}[\mathcal{L}]\varphi$ is dense in \mathcal{K} .

Remark. An immediate corollary of Theorem 6.1 is that a quantum Markov semigroup $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_t$ is irreducible if and only if its adjoint $\mathcal{T}^* = (\mathcal{T}_t^*)_t$ is irreducible.

We now introduce the notion of irreducibility of a CTOQW, focusing on the trajectorial formulation. Let $\mathcal{T} := (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ be a CTOQW on a set V . For i, j in V and $n \in \mathbb{N}$, we denote by $\mathcal{P}^n(i, j)$ the set of continuous-time trajectories going from i to j in n jumps :

$$\mathcal{P}^n(i, j) = \{\xi = (i_0, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n) \in \Xi_{\infty}^{(n)} \mid i_0 = i, i_n = j\}$$

and we set $\mathcal{P}(i, j) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^n(i, j)$. For any $\xi = (i, \dots, j; t_1, \dots, t_n)$ in $\mathcal{P}(i, j)$, we recall that the operator $T_t(\xi)$ from \mathfrak{h}_i to \mathfrak{h}_j is defined by

$$T_t(\xi) = e^{(t-t_n)G_j} R_{i_{n-1}}^j e^{(t_n-t_{n-1})G_{i_{n-1}}} \dots e^{(t_2-t_1)G_{i_1}} R_i^{i_1} e^{t_1 G_i}.$$

The following proposition is a direct application of Theorem 6.1, and will constitute our definition of irreducibility for continuous-time open quantum walks. The criterion here is equivalent to any other formulation proposed in Theorem 6.1.

Proposition 6.2. The CTOQW defined by the quantum Markov semigroup $\mathcal{T} := (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ is *irreducible* if and only if, for every i and j in V and for any φ in $\mathfrak{h}_i \setminus \{0\}$, the set $\{T_t(\xi)\varphi, t \geq 0, \xi \in \mathcal{P}(i, j)\}$ is total in \mathfrak{h}_j .

The proposition below gives a sufficient condition for irreducibility of a quantum Markov semigroup. We recall (see [27]) that a map on $\mathcal{I}_1(\mathcal{K})$ of the form $\mu \mapsto \sum_i L_i \mu L_i^*$ is called irreducible if for any $\varphi_0 \neq 0$, the set $\mathbb{C}[L]\varphi_0$ is dense in \mathcal{K} (this is simply a discrete-time analogue of the present notion of irreducibility).

Proposition 6.3. Let $\mathcal{T} := (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ be a quantum Markov semigroup with Lindbladian

$$\mathcal{L}(\mu) = G\mu + \mu G^* + \sum_i L_i \mu L_i^*.$$

If $\Phi(\mu) = \sum_i L_i \mu L_i^*$ is irreducible, then $\mathcal{T} := (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ is irreducible as well.

Proof. This is obvious from Lemma 3.3 of [27] and the third characterization of irreducibility in Theorem 6.1.

One can compare the present notion of irreducibility with the usual one for classical Markov chain. Actually if $Q = (q_{i,j})_{i,j \in V}$ denotes the generator of a continuous-time Markov chain, then the irreducibility of the chain depends on the transitions $(q_{i,j}, i \neq j)$. In particular the Markov chain is irreducible if and only if for all i, j there exists a path $i_0 = i, i_1, \dots, i_n = j$ such that $q_{i_0, i_1} \times \dots \times q_{i_{n-1}, i_n} > 0$. Unfortunately in the case of CTOQW only one implication is valid since one can find $\mathcal{T} := (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ irreducible where the corresponding Φ is not irreducible (see the example below).

Example 6.1. We focus on an example on $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes |1\rangle + \mathbb{C}^2 \otimes |2\rangle$, where the Lindbladian is defined by (6.7) with :

$$G_1 = G_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_1^2 = R_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

One can easily check that $\{R(\xi) \varphi, \xi \in \mathcal{P}(i, j)\} = \mathfrak{h}_j$ for all $i, j \in \{1, 2\}$ and $\varphi \in \mathfrak{h}_i \setminus \{0\}$ but the discrete OQW defined by R_1^2 and R_2^1 is not irreducible. This is an example of CTOQW where $e^{t\mathcal{L}}$ is irreducible even though Φ is not.

6.3 Transience and recurrence of irreducible CTOQW

In the classical theory of Markov chains on a finite or countable graph, an irreducible Markov chain can be either transient or recurrent. Transience and recurrence issues are central to the study of Markov chains and help describe the Markov chain's overall structure. In the case of CTOQW, transience and recurrence notions are made more complicated by the fact that the process $(X_t)_t$ alone is not a Markov chain.

In the present section, we define the notion of recurrence and transience of a vertex in our setup and prove a dichotomy similar to the classical case, based on the average occupation time at a vertex. However, compared to the classical case, the relationship between the occupation time and the first passage time at the vertex is less straightforward. Recall that the first passage time at a given vertex $i \in V$ is defined as

$$\tau_i = \inf\{t \geq T_1 | X_t = i\}$$

where T_1 is defined in Section 6.1.3. Similarly the occupation time is given by

$$n_i = \int_0^\infty \mathbb{1}_{X_t=i} dt.$$

In the discrete-time and irreducible case (Theorem 3.1. of [5]), the authors prove that there exists a trichotomy rather than the classical dichotomy. We state a similar result for continuous-time semifinite open quantum walks (we recall that an OQW is semifinite if $\dim \mathfrak{h}_i < \infty$ for all $i \in V$).

Theorem 6.2. *Consider a semifinite irreducible continuous-time open quantum walk. Then we are in one (and only one) of the following situations :*

1. *For any i, j in V and ρ in $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$, one has $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) = \infty$ and $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = 1$.*
2. *For any i, j in V and ρ in $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$, one has $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) < \infty$ and $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_i < \infty) < 1$.*
3. *For any i, j in V and ρ in $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$, one has $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) < \infty$, but there exist i in V and ρ, ρ' in $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$ (ρ necessarily non-faithful) such that $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_i < \infty) = 1$ and $\mathbb{P}_{i,\rho'}(\tau_i < \infty) < 1$.*

Note that in the sequel we only focus on semifinite case. Recall that when \mathfrak{h}_i is one-dimensional for all $i \in V$, we recover classical continuous-time Markov chains. In this case, the Markov chain falls in one of the first two categories of this theorem; that is, the third category is a specifically quantum situation.

The rest of this section is dedicated to the proof of Theorem 6.2. More precisely, in Subsection 6.3.1 we prove the dichotomy between infinite and finite average occupation time. This allows us to define transience and recurrence of CTOQW. We also give examples of CTOQW that fall in each of the three classes of Theorem 6.2. In Section 6.3.2 we state technical results that give closed expressions to the occupation time and the first passage time. Finally, the proof of Theorem 6.2 is given in Subsection 6.3.3.

6.3.1 Definition of recurrence and transience

We begin by proving that for an irreducible CTOQW, the average occupation time $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j)$ of site j starting from site i is either finite for all i, j or infinite for all i, j .

Proposition 6.4. Consider a semifinite irreducible continuous-time open quantum walk. Suppose furthermore that there exist $i_0, j_0 \in V$ and $\rho_0 \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_{i_0}}$ such that $\mathbb{E}_{i_0, \rho_0}(n_{j_0}) = \infty$. Then, for all $i, j \in V$ and $\rho \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$ one has $\mathbb{E}_{i, \rho}(n_j) = \infty$.

Proof. Fix $i, j \in V$ and $\rho \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$. Then one has

$$\mathbb{E}_{i, \rho}(n_j) = \int_0^\infty \mathbb{P}_{i, \rho}(X_t = j) dt = \int_0^\infty \text{Tr}(e^{t\mathcal{L}}(\rho \otimes |i\rangle\langle i|)(I \otimes |j\rangle\langle j|)) dt.$$

By hypothesis, $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ is irreducible and thus positivity improving by Theorem 6.1; by Remark 6.2 the same is true of $(\mathcal{T}_t^*)_{t \geq 0}$. Therefore, since for any $i \in V$, \mathfrak{h}_i is finite-dimensional, for any $s > 0$ there exist scalars $\alpha, \beta > 0$ such that

$$e^{s\mathcal{L}}(\rho \otimes |i\rangle\langle i|) \geq \alpha \rho_0 \otimes |i_0\rangle\langle i_0| \quad \text{and} \quad e^{s\mathcal{L}^*}(I \otimes |j\rangle\langle j|) \geq \beta I \otimes |j_0\rangle\langle j_0|.$$

We then have, fixing $s > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{i, \rho}(n_j) &\geq \int_{2s}^\infty \text{Tr}(e^{(t-2s)\mathcal{L}}(e^{s\mathcal{L}}(\rho \otimes |i\rangle\langle i|)) e^{s\mathcal{L}^*}(I \otimes |j\rangle\langle j|)) dt \\ &\geq \alpha\beta \int_0^\infty \text{Tr}(e^{u\mathcal{L}}(\rho_0 \otimes |i_0\rangle\langle i_0|)(I \otimes |j_0\rangle\langle j_0|)) du \\ &\geq \alpha\beta \mathbb{E}_{i_0, \rho_0}(n_{j_0}). \end{aligned}$$

This concludes the proof.

The above proposition leads to a natural definition of recurrent and transient vertices of V .

Definition 6.3. For any continuous-time open quantum walk, we say that a vertex i in V is :

- recurrent if for any $\rho \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$, $\mathbb{E}_{i, \rho}(n_i) = \infty$;
- transient if there exists $\rho \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$ such that $\mathbb{E}_{i, \rho}(n_i) < \infty$.

Thus, by Proposition 6.4, for an irreducible CTOQW, either all vertices are recurrent or all vertices are transient. Furthermore, in the transient case, $\mathbb{E}_{i, \rho}(n_i) < \infty$ for all ρ in $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$.

We conclude this section by illustrating Theorem 6.2 by simple examples. The n -th example corresponds to the n -th situation in Theorem 6.2.

Example 6.2.

1. For $V = \{0, 1\}$ and $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_1 = \mathbb{C}$, consider the CTOQW characterized by the following operators :

$$G_0 = G_1 = -\frac{1}{2}, \quad R_0^1 = R_1^0 = 1.$$

Then the process $(X_t)_{t \geq 0}$ is a classical continuous Markov chain on $\{0, 1\}$, where the walker jumps from one site to the other after an exponential time of parameter 1.

2. For $V = \mathbb{Z}$ and $\mathfrak{h}_i = \mathbb{C}$ for all $i \in \mathbb{Z}$, consider the CTOQW described by the transition operators :

$$G_i = -\frac{1}{2}, \quad R_i^{i+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad R_i^{i-1} = \frac{1}{2}, \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}.$$

The process $(X_t)_{t \geq 0}$ is a classical continuous Markov chain on \mathbb{Z} where after an exponential time of parameter 1, the walker jumps to the right with probability $\frac{3}{4}$ or to the left with probability $\frac{1}{4}$.

3. Consider the CTOQW defined by $V = \mathbb{N}$ with $\mathfrak{h}_1 = \mathbb{C}^2$ and $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_i = \mathbb{C}$ for $i \geq 2$, and

$$G_0 = -\frac{1}{2}, \quad R_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G_1 = -\frac{1}{2}I_2, R_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_2^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G_i = -\frac{1}{2}, \quad R_i^{i+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ for } i \geq 2 \text{ and } R_i^{i-1} = \frac{1}{2} \text{ for } i \geq 3.$$

This is an example of positivity improving CTOQW where, for $\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, one has

$$\mathbb{P}_{1,\rho}(\tau_1 < \infty) = 1$$

but

$$\mathbb{P}_{i,\rho'}(\tau_i < \infty) < 1$$

for any $\rho' \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. This example therefore exhibits ‘‘specifically quantum’’ behavior. This example is inspired from [5].

6.3.2 Technical results

Proposition 6.5 below is essential, as it expresses the probability of reaching a site in finite time as the trace of the initial state, evolved by a certain operator.

Proposition 6.5. For any continuous-time open quantum walk, there exists a completely positive linear operator $\mathfrak{P}_{i,j}$ from $\mathcal{I}(\mathfrak{h}_i)$ to $\mathcal{I}(\mathfrak{h}_j)$ such that for every $i, j \in V$ and $\rho \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$,

$$\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = \text{Tr}(\mathfrak{P}_{i,j}(\rho)).$$

Furthermore, the map $\mathfrak{P}_{i,j}$ can be expressed by :

$$\mathfrak{P}_{i,j}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{n-1} \in V \setminus \{j\} \\ i_0=i, i_n=j}} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < \infty} R(\xi) \rho R(\xi)^* dt_1 \dots dt_n,$$

where $R(\xi) = R_{i_{n-1}}^{i_n} e^{(t_n - t_{n-1})G_{i_{n-1}}} R_{i_{n-2}}^{i_{n-1}} \dots R_{i_0}^{i_1} e^{t_1 G_{i_0}}$ for $\xi = (i_0, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n)$.

Note that we do not require the \mathfrak{h}_i to be finite-dimensional here.

Proof. We have the trivial identity :

$$\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{n-1} \in V \setminus \{j\} \\ i_0=i, i_n=j}} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} \text{Tr}(e^{(t-t_n)\mathcal{L}}(R(\xi) \rho R(\xi)^* \otimes |j\rangle\langle j|)) dt_1 \dots dt_n. \quad (6.20)$$

Then, since $e^{(t-t_n)\mathcal{L}}$ is trace preserving,

$$\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{n-1} \in V \setminus \{j\} \\ i_0 = i, i_n = j}} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} \text{Tr}(R(\xi) \rho R(\xi)^*) dt_1 \dots dt_n,$$

and since both sides of the identity are nondecreasing in t , taking the limit $t \rightarrow +\infty$ yields

$$\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{n-1} \in V \setminus \{j\} \\ i_0 = i, i_n = j}} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < \infty} \text{Tr}(R(\xi) \rho R(\xi)^*) dt_1 \dots dt_n.$$

It remains to show that $\mathfrak{P}_{i,j}$ is well defined. Let us denote by $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an increasing sequence of subsets of V such that $|V_n| = \min(n, |V|)$ and $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = V$. For any $X \in \mathcal{I}(\mathfrak{h}_i) \setminus \{0\}$ write the canonical decomposition $X = X_1 - X_2 + iX_3 - iX_4$ of X as a linear combination of four nonnegative operators. We get

$$\begin{aligned} & \left| \text{Tr} \left| \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{n-1} \in V_N \setminus \{j\} \\ i_0 = i, i_n = j}} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < N} R(\xi) X R(\xi)^* dt_1 \dots dt_n \right| \right| \\ & \leq \sum_{m=1}^4 \text{Tr} \left| \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{n-1} \in V_N \setminus \{j\} \\ i_0 = i, i_n = j}} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < N} R(\xi) X_m R(\xi)^* dt_1 \dots dt_n \right| \\ & \leq \sum_{m=1}^4 \text{Tr} X_m \times \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{n-1} \in V_N \setminus \{j\} \\ i_0 = i, i_n = j}} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < N} \text{Tr}(R(\xi) \frac{X_m}{\text{Tr}(X_m)} R(\xi)^*) dt_1 \dots dt_n \\ & \leq \sum_{m=1}^4 \text{Tr} X_m \times \mathbb{P}_{i, \frac{X_m}{\text{Tr}(X_m)}}(\tau_j < N) \\ & \leq \sum_{m=1}^4 \text{Tr} X_m \\ & \leq 2\text{Tr} |X| \end{aligned}$$

(alternatively apply Theorem 5.17 in [31] to $X_1 - X_2$ and $X_3 - X_4$). Then

$$\sup_N \text{Tr} \left| \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{n-1} \in V_N \setminus \{j\} \\ i_0 = i, i_n = j}} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < N} R(\xi) X R(\xi)^* dt_1 \dots dt_n \right| < \infty.$$

Consequently, by the Banach-Steinhaus Theorem, the operator on $\mathcal{I}(\mathfrak{h}_i)$ to $\mathcal{I}(\mathfrak{h}_j)$ defined by

$$\mathfrak{P}_{i,j}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{n-1} \in V \setminus \{j\} \\ i_0 = i, i_n = j}} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < \infty} R(\xi) X R(\xi)^* dt_1 \dots dt_n$$

is everywhere defined and bounded.

As a corollary, using the definition of the operator $\mathfrak{P}_{i,j}$ for $i, j \in V$, we obtain a useful expression for $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j)$:

Corollary 6.2. *For every $i, j \in V$ and $\rho \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$, we have*

$$\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{Tr}(\mathfrak{P}_{j,j}^k \circ \mathfrak{P}_{i,j}(\rho)). \quad (6.21)$$

Proof. Let $i, j \in V$ and $\rho \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$. Then

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) &= \int_0^\infty \mathbb{P}_{i,\rho}(X_t = j) dt = \int_0^\infty \text{Tr}(e^{t\mathcal{L}}(\rho \otimes |i\rangle\langle i|)(\text{Id} \otimes |j\rangle\langle j|)) dt \\ &= \text{Tr}\left(\sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N} \\ m_1 < \dots < m_k = n}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{m_1-1}, i_{m_1+1}, \dots, i_{m_k-1} \in V \setminus \{j\} \\ i_0 = i, i_{m_1} = i_{m_2} = \dots = i_{m_k} = j}} \int_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} \Upsilon \rho \Upsilon^* dt_1 \cdots dt_n dt\right), \end{aligned}$$

where $\Upsilon = R_{i_{n-1}}^{i_n} e^{(t_n - t_{n-1})G_{i_{n-1}}} R_{i_{n-2}}^{i_{n-1}} \cdots R_{i_{m_1}}^{i_{m_1+1}} e^{(t_{m_1+1} - t_{m_1})G_{i_{m_1}}} R_{i_{m_1-1}}^{i_{m_1}} \cdots R_{i_0}^{i_1} e^{t_1 G_{i_0}}$. The above expression corresponds to a decomposition of any path from i to j as a concatenation of a path from i to j and k paths from j to j which do not go through j . This yields (6.21).

The next corollary allows us to link the quantity $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty)$ to the adjoint of the operator $\mathfrak{P}_{i,j}$. In particular, as we shall see, it is a first step towards linking the properties of $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty)$ and $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j)$.

Corollary 6.3. *Let i and j be in V . One has*

$$\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = 1 \iff \mathfrak{P}_{i,j}^*(\text{Id}) = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \text{ in the decomposition } \mathfrak{h}_i = \text{Ran } \rho \oplus (\text{Ran } \rho)^\perp.$$

In particular, if there exists a faithful ρ in $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$ such that $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = 1$, then

$$\mathbb{P}_{i,\rho'}(\tau_j < \infty) = 1$$

for any ρ' in $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$.

Proof. By Proposition 6.5, one has $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = \text{Tr}(\rho \mathfrak{P}_{i,j}^*(\text{Id}))$. Therefore, if $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = 1$, then $\mathfrak{P}_{i,j}^*(\text{Id})$ has the following form in the decomposition $\mathfrak{h}_i = \text{Ran } \rho \oplus (\text{Ran } \rho)^\perp$:

$$\mathfrak{P}_{i,j}^*(\text{Id}) = \begin{pmatrix} \text{Id} & A \\ A & B \end{pmatrix}.$$

Besides, the fact that $\text{Id} \geq \mathfrak{P}_{i,j}^*(\text{Id})$ forces A to be null. In particular, if ρ is faithful, then $\mathfrak{P}_{i,j}^*(\text{Id}) = \text{Id}$ and therefore $\mathbb{P}_{i,\rho'}(\tau_j < \infty) = 1$ for any ρ' in $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$.

6.3.3 Proof of Theorem 6.2

Let i and j be in V . As we can see in Corollary 6.3, if we suppose that $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = 1$ for a faithful density matrix ρ , we necessarily have $\mathfrak{P}_{i,j}^*(\text{Id}) = \text{Id}$. This will be used in the following proposition, which in turn explains the statement regarding non-faithfulness in the third category of Theorem 6.2.

Proposition 6.6. *Let i be in V . If there exists a faithful ρ in $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$ such that $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_i < \infty) = 1$, then one has $\mathbb{E}_{i,\rho'}(n_i) = \infty$ for any ρ' in $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$.*

Proof. We set $\tau_1^i = \tau_i$ and, for all $n > 1$, we define $\tau_i^{(n)}$ as the time at which $(X_t)_{t \geq 0}$ reaches i for the n -th time :

$$\tau_i^{(n)} = \inf\{t > \tau_{n-1}^i \mid X_t = i \text{ and } X_{t-} \neq i\}.$$

From Corollary 6.3, one has $\mathbb{P}_{i,\rho'}(\tau_i < \infty) = 1$ for all ρ' in $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$. This implies that for all $n > 0$, $\tau_i^{(n)}$ is $\mathbb{P}_{i,\rho'}$ -almost finite for any $\rho' \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$. For $n \geq 0$, let T_n^i be the occupation time in i between τ_n^i and τ_{n+1}^i :

$$T_n^i = \inf\{u \mid X_{\tau_i^{(n)}+u} \neq i\}$$

with the convention that $\tau_i^{(0)} = 0$. Since we have

$$\mathbb{E}_{i,\rho'}(n_i) \geq \mathbb{E}_{i,\rho'}\left(\sum_{n \geq 1} T_n^i\right) \geq \sum_{n \geq 1} \inf_{\rho \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}} \mathbb{E}_{i,\rho}(T_n^i),$$

it will be enough to obtain a lower bound for $\mathbb{E}_{i,\hat{\rho}}(T_n^i)$ which is uniform in n and in $\hat{\rho}$. To this end, we use the quantum trajectories defined in (6.11). We first compute $\mathbb{P}_{i,\hat{\rho}}(T_n^i > t)$ for all $t \geq 0$. To treat the case of $n = 1$ we consider the solution of

$$\eta_t^{\hat{\rho}} = \hat{\rho} + \int_0^t (G_i \eta_s^{\hat{\rho}} + \eta_s^{\hat{\rho}} G_i^* - \eta_s^{\hat{\rho}} \text{Tr}(G_i \eta_s^{\hat{\rho}} + \eta_s^{\hat{\rho}} G_i^*)) ds. \quad (6.22)$$

Using the independence of the Poisson processes $N^{i,j}$ involved in (6.11) we get

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{i,\hat{\rho}}(T_1^i > t) &= \mathbb{P}_{i,\hat{\rho}}(\text{no jump has occurred before time } t) \\ &= \mathbb{P}_{i,\hat{\rho}}(N^{i,j}(\{u, y \mid 0 \leq u \leq t, 0 \leq y \leq \text{Tr}(R_i^j \eta_u^{\hat{\rho}} R_i^{j*})\}) = 0 \ \forall j \neq i) \\ &= \prod_{j \neq i} \mathbb{P}_{i,\hat{\rho}}(N^{i,j}(\{u, y \mid 0 \leq u \leq t, 0 \leq y \leq \text{Tr}(R_i^j \eta_u^{\hat{\rho}} R_i^{j*})\}) = 0) \\ &= \prod_{j \neq i} \exp\left\{-\int_0^t \text{Tr}(R_i^j \eta_s^{\hat{\rho}} R_i^{j*}) ds\right\} \\ &= \exp\left(\int_0^t \text{Tr}((G_i + G_i^*) \eta_s^{\hat{\rho}}) ds\right) \end{aligned} \quad (6.23)$$

where we used relation (6.6). Similarly, using the strong Markov property,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{i,\hat{\rho}}(T_n^i > t) &= \mathbb{E}_{i,\hat{\rho}}(\mathbf{1}_{T_n^i > t}) \\ &= \mathbb{E}_{i,\hat{\rho}}(\mathbb{E}_{i,\rho_{\tau_n^i}}(\mathbf{1}_{T_1^i > t})) \\ &= \mathbb{E}_{i,\hat{\rho}}\left(\exp\left(\int_0^t \text{Tr}((G_i + G_i^*) \eta_s^{\rho_{\tau_n^i}}) ds\right)\right) \\ &\geq e^{-t\|G_i + G_i^*\|_\infty}. \end{aligned}$$

Now, using the fact that $\mathbb{E}_{i,\hat{\rho}}(T_n^i) = \int_0^\infty \mathbb{P}_{i,\hat{\rho}}(T_n^i > t) dt$, this gives us the expected lower bound :

$$\mathbb{E}_{i,\hat{\rho}}(T_n^i) \geq \frac{1}{\|G_i + G_i^*\|_\infty}.$$

This concludes the proof.

The next proposition is connected to the first point of Theorem 6.2.

Proposition 6.7. Consider a semifinite irreducible continuous-time open quantum walk. If there exist i, j in V and $\rho \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$ such that $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) = \infty$, then one has $\mathbb{P}_{j,\rho'}(\tau_j < \infty) = 1$ for any ρ' in $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_j}$.

Proof. By Proposition 6.2, there is no nontrivial invariant subspace of \mathfrak{h}_j left invariant by $R(\xi)$ for all $\xi \in \mathcal{P}(j, j)$. Since any such ξ is a concatenation of paths from j to j that remain in $V \setminus \{j\}$ except for their start- and endpoints, there is also no nontrivial invariant subspace of \mathfrak{h}_j left invariant by the operator $\mathfrak{P}_{j,j}$ of Proposition 6.5. The latter is therefore a completely positive irreducible map acting on the set of trace-class operators on \mathfrak{h}_j . By the Russo-Dye Theorem (see [26]), one has $\|\mathfrak{P}_{j,j}\| = \|\mathfrak{P}_{j,j}^*(\text{Id})\| \leq 1$, so that the spectral radius λ of $\mathfrak{P}_{j,j}$ satisfies $\lambda \leq 1$. By the Perron-Frobenius Theorem of Evans and Hoegh-Krøhn (see [16] or alternatively Theorem 3.1 in [27]), there exists a faithful density matrix ρ' on \mathfrak{h}_j such that $\mathfrak{P}_{j,j}(\rho') = \lambda \rho'$. If $\lambda < 1$, then by Corollary 6.2 one has $\mathbb{E}_{j,\rho'}(n_j) < \infty$, but then Proposition 6.4 contradicts our running assumption that $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) = \infty$. Therefore $\lambda = 1$ and ρ' is a faithful density matrix such that $\mathbb{P}_{j,\rho'}(\tau_j < \infty) = \text{Tr}(\mathfrak{P}_{j,j}(\rho')) = \text{Tr}(\rho') = 1$. We then conclude by Corollary 6.3.

Proposition 6.8. Consider a semifinite irreducible continuous-time open quantum walk ; if there exists $i \in V$ such that for all $\rho' \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$ one has $\mathbb{P}_{i,\rho'}(\tau_i < \infty) = 1$, then $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = 1$ for any $j \in V$ and $\rho \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$.

Proof. Fix i and j in V . Observe first that, by irreducibility, for any ρ in $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$, there exists

$$\xi = (i = i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n = j; t_1, \dots, t_n)$$

such that $\text{Tr}(R(\xi)\rho R(\xi)^*) > 0$. We denote by $t(\xi)$ the element t_n of ξ . Using the continuity of $\text{Tr}(R(\xi)\rho R(\xi)^*)$ in ρ and the compactness of $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$, we obtain a finite family ξ_1, \dots, ξ_p , of paths, again going from i to j , such that

$$\inf_{\rho \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}} \max_{k=1, \dots, p} \text{Tr}(R(\xi_k)\rho R(\xi_k)^*) > 0.$$

Let $\delta > \max_{k=1, \dots, p} t(\xi_k)$. By continuity of each $\text{Tr}(R(\xi_i)\rho R(\xi_i)^*)$ in the underlying jump times t_1, \dots, t_n and using expression (6.20), we have

$$\alpha := \inf_{\rho \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}} \mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j \leq \delta) > 0.$$

Now, if $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_i < \infty) = 1$ for all ρ in $\mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$, then the discussion in Section 6.1.3 imply that almost-surely one can find an increasing sequence $(t_n)_n$ of times with $t_n \rightarrow \infty$ and $x_{t_n} = i$. Choose a subsequence $(t_{\varphi(n)})_n$ such that $t_{\varphi(n)} - t_{\varphi(n-1)} > \delta$ for all n . Since never reaching j means in particular not reaching j between $t_{\varphi(n)}$ and $t_{\varphi(n+1)}$ for $n = 1, \dots, k$, the Markov property of $(X_t, \rho_t)_{t \geq 0}$ and the lower bound $t_{\varphi(n)} - t_{\varphi(n-1)} > \delta$ imply that for all $\rho \in \mathcal{S}_{\mathfrak{h}_i}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j = \infty) &\leq \mathbb{P}_{i,\rho}(\forall 0 \leq n \leq k, \forall t \in [t_{\varphi(n)}, t_{\varphi(n+1)}], X_t \neq j) \\ &\leq \left(\sup_{\rho \in \mathfrak{h}_i} \mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j > \delta) \right)^k \\ &\leq (1 - \alpha)^k. \end{aligned}$$

Since the above is true for all k , we have $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = 1$.

Now we combine all the results of Section 6.3.2 to prove Theorem 6.2.

Proof (Proof of Theorem 6.2). Proposition 6.4 shows that either $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) = \infty$ for all i, j and ρ , or $\mathbb{E}_{i,\rho}(n_j) < \infty$ for all i, j and ρ . Proposition 6.7 combined with Proposition 6.8 shows that in the former case, $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = 1$ for all i, j and ρ as well. Proposition 6.6 shows that, in the latter case, $\mathbb{P}_{i,\rho}(\tau_j < \infty) = 1$ may only occur for non-faithful ρ , and this concludes the proof.

Acknowledgments The authors are supported by ANR project StoQ ANR-14-CE25-0003-01.

Bibliographie

- [1] S. Attal, N. Guillotin-Plantard, and C. Sabot. Central limit theorems for open quantum random walks and quantum measurement records. *Ann. Henri Poincaré*, 16(1) :15–43, 2015.
- [2] S. Attal, F. Petruccione, C. Sabot, and I. Sinayskiy. Open quantum random walks. *J. Stat. Phys.*, 147(4) :832–852, 2012.
- [3] S. Attal, F. Petruccione, and I. Sinayskiy. Open quantum walks on graphs. *Phys. Lett. A*, 376(18) :1545–1548, 2012.

- [4] A. Barchielli and V. P. Belavkin. Measurements continuous in time and a posteriori states in quantum mechanics. *J. Phys. A*, 24(7) :1495–1514, 1991.
- [5] I. Bardet, D. Bernard, and Y. Pautrat. Passage times, exit times and Dirichlet problems for open quantum walks. *J. Stat. Phys.*, 167(2) :173–204, 2017.
- [6] M. Bauer, D. Bernard, and A. Tilloy. The open quantum Brownian motions. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, (9) :p09001, 48, 2014.
- [7] L. Bouten, M. Guță, and H. Maassen. Stochastic Schrödinger equations. *J. Phys. A*, 37(9) :3189–3209, 2004.
- [8] R. Carbone and Y. Pautrat. Homogeneous open quantum random walks on a lattice. *J. Stat. Phys.*, 160(5) :1125–1153, 2015.
- [9] R. Carbone and Y. Pautrat. Irreducible decompositions and stationary states of quantum channels. *Rep. Math. Phys.*, 77(3) :293–313, 2016.
- [10] R. Carbone and Y. Pautrat. Open quantum random walks : reducibility, period, ergodic properties. *Ann. Henri Poincaré*, 17(1) :99–135, 2016.
- [11] S. L. Carvalho, L. F. Guidi, and C. F. Lardizabal. Site recurrence of open and unitary quantum walks on the line. *Quantum Inf. Process.*, 16(1) :Art. 17, 32, 2017.
- [12] E. B. Davies. Quantum stochastic processes. II. *Comm. Math. Phys.*, 19 :83–105, 1970.
- [13] E. B. Davies. *Quantum theory of open systems*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1976.
- [14] J. Dereziński, W. De Roeck, and C. Maes. Fluctuations of quantum currents and unravelings of master equations. *J. Stat. Phys.*, 131(2) :341–356, 2008.
- [15] K.-J. Engel and R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000. With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt.
- [16] D. E. Evans and R. Høegh-Krohn. Spectral properties of positive maps on C^* -algebras. *J. London Math. Soc. (2)*, 17(2) :345–355, 1978.
- [17] F. Fagnola and R. Rebolledo. Subharmonic projections for a quantum Markov semigroup. *J. Math. Phys.*, 43(2) :1074–1082, 2002.
- [18] F. Fagnola and R. Rebolledo. Transience and recurrence of quantum Markov semigroups. *Probab. Theory Related Fields*, 126(2) :289–306, 2003.
- [19] V. Jakšić, C.-A. Pillet, and M. Westrich. Entropic fluctuations of quantum dynamical semigroups. *J. Stat. Phys.*, 154(1-2) :153–187, 2014.
- [20] C. F. Lardizabal and R. R. Souza. Open quantum random walks : ergodicity, hitting times, gambler’s ruin and potential theory. *J. Stat. Phys.*, 164(5) :1122–1156, 2016.
- [21] G. Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics*, 48(2) :119–130, 1976.

- [22] J. R. Norris. *Markov chains*, volume 2 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Reprint of 1997 original.
- [23] C. Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of a stochastic Schrödinger equation : the diffusive case. *Ann. Probab.*, 36(6) :2332–2353, 2008.
- [24] C. Pellegrini. Poisson and diffusion approximation of stochastic master equations with control. *Ann. Henri Poincaré*, 10(5) :995–1025, 2009.
- [25] C. Pellegrini. Continuous time open quantum random walks and non-Markovian Lindblad master equations. *J. Stat. Phys.*, 154(3) :838–865, 2014.
- [26] B. Russo and H. A. Dye. A note on unitary operators in C^* -algebras. *Duke Math. J.*, 33 :413–416, 1966.
- [27] R. Schrader. Perron-Frobenius theory for positive maps on trace ideals. *arXiv preprint math-ph/0007020*, 2000.
- [28] I. Sinayskiy and F. Petruccione. Efficiency of open quantum walk implementation of dissipative quantum computing algorithms. *Quantum Inf. Process.*, 11(5) :1301–1309, 2012.
- [29] I. Sinayskiy and F. Petruccione. Quantum optical implementation of open quantum walks. *Int. J. Quantum Inf.*, 12(2) :1461010, 8, 2014.
- [30] M. D. Srinivas and E. B. Davies. Photon counting probabilities in quantum optics. *Optica Acta*, 28(7) :981–996, 1981.
- [31] M. M. Wolf. Quantum channels & operations : Guided tour. <http://www-m5.ma.tum.de/foswiki/pub/M5/Allgemeines/MichaelWolf/QChannelLecture.pdf>, 2012. Lecture notes based on a course given at the Niels-Bohr Institute.

