Projet de fin d'année

Objectif

Travailler de manière collaborative pour résoudre et exposer un problème mathématique en groupe.

Instructions

1. **Formation des équipes et choix du projet :**
   Formez des équipes de 3 membres chacune (possible d'être 2 ou 4 éventuellement). Discutez en groupe pour choisir un projet qui vous intéresse collectivement. Il y a 10 sujets ci-dessous. Il ne peut y avoir plus de deux groupes sur un même projet. Les projets sont classés par ordre de difficulté croissante, choisissez un projet qui est cohérent avec le niveau de votre groupe afin de ne pas laisser uniquement les projets difficiles à vos camarades.
2. **Résolution du problème :**
   Comme pour un devoir maison, résoudre le problème sur copie double. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Contrairement à d'habitude, vous rendrez une seule copie pour tout votre groupe de travail.
3. **Présentation finale :**
   Préparez une présentation finale pour partager votre projet avec le reste de la classe. La présentation doit durer environ 20 min. Cette présentation se déroulera en trois parties.
   - La première doit présenter rapidement l'objet mathématiques étudié, on peut notamment énoncer les résultats connus ou conjecturés et aborder la partie historique ou culturelle associée. Dans cette première partie, vous êtes assez libre tant que vous racontez quelque chose d'intéressant.
   - La deuxième partie aura pour but d'exposer les grandes lignes de la résolution de votre problème. Pas besoin de détailler un calcul, cela doit rester concis et abordable pour l'auditoire.
   - La troisième partie sera quand elle consacrée à la partie informatique, on attend dans celle-ci un programme python qui permet d'illustrer votre projet. Une approximation de π et/ou des illustrations visuelles seraient très appréciées.

Dates clés

- Date limite de remise de la résolution du problème : 17 juin
- Date de présentation finale : semaine du 23 juin

Remarque : La réussite de ce projet dépendra de votre engagement le plus tôt possible. N'hésitez pas à vous y mettre dès à présent et à solliciter l'aide de votre enseignant en cas de besoin. Bon travail à tous !

Projet A : CSSA et approximation de l'intégrale de Dirichlet

Partie I : Le critère spécial des séries alternées (CSSA)
Dans cette partie, (a_n) désigne une suite réelle décroissante et qui converge vers zéro. Le but de cet partie est d'établir que la série $\sum(-1)^n a_n$ converge. Ce théorème s'appelle le *critère spécial des séries alternées*.

Pour n entier naturel, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 0$.
2. Montrer que les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes.
3. En déduire que la suite (S_n) converge vers un réel ℓ et déterminer le signe de ℓ.
4. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n - \ell| \leqslant a_n$$

Partie II : Un calcul approché d'intégrale
Pour n entier naturel, on note :

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t + n\pi} \mathrm{d}t \text{ et } v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$$

5. Justifier que u_0 et v_0 sont bien définis. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n\pi}$$
6. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n = (-1)^n u_n$ et que $\sum (-1)^n u_n$ converge.
7. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$.
8. On pose $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$. Quelle valeur de N faut-il choisir pour que $\sum_{n=0}^{N} (-1)^n u_n$ donne une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ à 10^{-6} près ?

Projet B : Irrationalité de π

Le but ici est de démontrer que le nombre π est irrationnel.
On suppose par l'absurde que π est un nombre rationnel. Il existe alors $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\pi = \frac{m}{n}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k = \frac{1}{k!} X^k (m - nX)^k$ et

$$I_k = \int_0^\pi P_k(x) \sin(x) \mathrm{d}x \,.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \pi]$,
$$0 \leqslant P_k(x) \leqslant \frac{1}{k!} \left(\frac{m^2}{n} \right)^k$$
3. En déduire que
$$\lim_{k \to +\infty} I_k = 0$$
4. Établir les résultats suivants :
   (a) pour tout $k \geqslant 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_k'(x) = (m - 2nx) P_{k-1}(x)$;
   (b) pour tout $k \geqslant 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_k''(x) = -2n P_{k-1}(x) + (m - 2nx)^2 P_{k-2}(x)$;
   (c) pour tout $k \geqslant 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_k''(x) = -2n(2k-1) P_{k-1}(x) + m^2 P_{k-2}(x)$.
5. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^\pi P_k''(x) \sin(x) \mathrm{d}x = -\int_0^\pi P_k'(x) \cos(x) \mathrm{d}x = -\int_0^\pi P_k(x) \sin(x) \mathrm{d}x$$
6. En déduire que, pour tout $k \geqslant 2$, $-I_k = -2n(2k-1) I_{k-1} + m^2 I_{k-2}$.
7. Montrer alors, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que $I_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
8. Justifier que la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.
9. En déduire que la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle.
10. Conclure.

Projet C : Intégrale de Dirichlet via le lemme de Lebesgue

Calcul de l'intégrale de Dirichlet $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

1) Existence de I : le but de cette question est de montrer que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.

Soit $A \in [2\pi, +\infty[$.

a) Justifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0, A]$.
On en déduit que $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ *existe.*

b) Montrer que $\displaystyle\int_{2\pi}^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos(A)}{A} + \int_{2\pi}^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

c) Montrer que la fonction $A \mapsto \displaystyle\int_{2\pi}^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$.

d) Conclure. *Cette limite est appelée* ***intégrale de Dirichlet****, notée* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit I_n et J_n par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin\Big((2n+1)x\Big)}{x}$ et $g_n : x \mapsto \dfrac{\sin\Big((2n+1)x\Big)}{\sin(x)}$.

a) Justifier que f_n et g_n sont prolongeables en des fonctions continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On en déduit que I_n et J_n existent.

b) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$

c) Montrer que la suite (J_n) est constante, et calculer J_n.

3) Lemme de Lebesgue :
Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ où a et b sont des réels avec $a < b$.
On pose, pour tout entier naturel n, $L_n = \displaystyle\int_a^b g(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$
Montrer en utilisant une intégration par parties que la suite (L_n) converge vers 0.

4) On définit la fonction φ sur $\left[0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ pour $x \in \left]0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi(0) = 0$.

a) Montrer que φ est continue sur $\left[0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5) Conclusion :
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = 0$ et en déduire la valeur de l'intégrale I.

Projet D : Constante d'Euler-Mascheroni

Partie I : Résultats préliminaires sur les restes de séries

1. Soit $\alpha \in]1;+\infty[$. D'après le théorème des séries de Riemann, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de la suite des restes de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.
2. Soient $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, (b_n) de signe constant et $\sum b_n$ convergente.
   D'après les critères de comparaison des séries à termes constants, $\sum a_n$ est convergente.
   On note R_n^a et R_n^b les restes d'ordre n des séries respectives $\sum a_n$ et $\sum b_n$.
   Montrer que $R_n^a \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n^b$. *Indice : utiliser la définition avec les quantificateurs pour l'équivalence.*

Partie II : Développement asymptotique de la série harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3. À l'aide d'une comparaison série intégrale, montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
4. Posons $u_n = H_n - \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer un équivalent de $(u_{n+1} - u_n)$ puis montrer que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.
   (b) En déduire que (u_n) converge. On note $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ la *constante d'Euler-Mascheroni.*
5. Posons $v_n = H_n - \ln(n) - \gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer un équivalent de $(v_{n+1} - v_n)$.
   (b) À l'aide des résultats préliminaires, déterminer un équivalent de (v_n).
   (c) En déduire que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
6. En poursuivant la démarche précédente, montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
7. Expliciter une méthode permettant d'obtenir une bonne approximation numérique de γ.

Projet E : Théorème d'Abel et monstres en analyse

Partie I : Théorème d'Abel

Dans cette partie, (a_n) désigne une suite de réels et (b_n) une suite de complexes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_k \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante et converge vers zéro. L'objectif de cette partie est de montrer qu'avec ces hypothèses, la série $\sum a_n\, b_n$ converge.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})\, B_k \,+\, a_n\, B_n$
2. Justifier que la série $\sum (a_n - a_{n+1})$ converge et calculer sa somme.
3. En déduire que $\sum (a_n - a_{n+1})\, B_n$ converge.
4. Conclure.

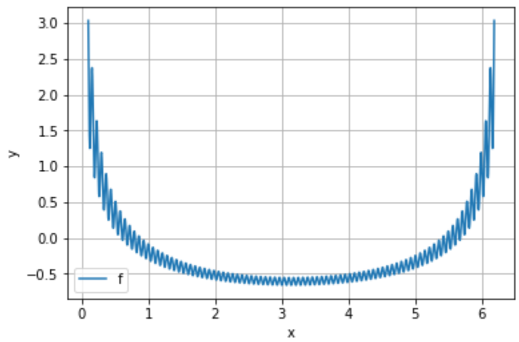
Partie II : Une fonction continue et nulle part dérivable

5. Soit $x \in]0; 2\pi[$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i} n x}}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha > 0$.
6. En déduire que pour tout $x \in]0; 2\pi[$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos(n\,x)}{\sqrt{n}}$ est convergente.

On pose désormais pour $x \in]0; 2\pi[$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\,x)}{\sqrt{n}}$$

Tentative de représentation de la courbe de f



Lorsque n augmente, le nombre de crêtes de la fonction $f_n : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{\sqrt{k}}$ sur une période augmente également. La fonction oscille de plus en plus. On peut démontrer (assez difficilement) que la fonction f obtenue à la limite est continue sur $]0, 2\pi[$ mais n'est dérivable en aucun point.

7. Essayons de déterminer $f(\pi)$ qui semble être un minimum de f.
   (a) Montrer qu'il existe $\delta \in [-2; -1]$ tel que :

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \to +\infty}{=} 2\sqrt{n} + \delta + o(1)$$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

   (c) En déduire la valeur de $f(\pi)$ en fonction de δ.

Projet F : Méthode des trapèzes et de Simpson

On considère une fonction réelle positive de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un segment $[a\,;b]$, avec $a < b$.
On cherche à calculer des valeurs approchées de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour ceci, on considère une subdivision régulière $(a_0\,,\cdots\,,\,a_n)$ du segment $[a\,;b]$, avec pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$: $a_k = a+k\frac{b-a}{n}$. Puis sur chaque segment $[a_k\,;a_{k+1}]$, on approche l'intégrale de f par l'intégrale de la fonction affine g_k prenant les mêmes valeurs que f en a_k et a_{k+1} : cette intégrale correspond ainsi à l'aire d'un trapèze. La somme des aires de ces trapèzes est notée T_n :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

La méthode des trapèzes consiste ainsi à approcher l'intégrale I par la valeur T_n, pour un entier n bien choisi.

1) Illustrer la méthode des trapèzes par un dessin soigné.

2) Démontrer que $T_n = \dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\tfrac{b-a}{n}\right)\right)$.

3) Justifier que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers I.

Par conséquent, si on choisit n suffisamment grand, T_n sera bien une valeur approchée de I.
On souhaite maintenant estimer l'erreur commise en remplaçant la valeur exacte I par la valeur approchée T_n. On note ε_n cette erreur, définie par :

$$\varepsilon_n = |I - T_n|.$$

4) Calculer ε_n de manière explicite lorsque $[a\,;b] = [0\,;1]$ et $f : x \mapsto x^2$.

Dans le cas général, nous allons montrer que :

$$\varepsilon_n \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12\,n^2} \quad , \qquad \text{avec } M = \sup_{x\in[a;b]} |f''(x)|.$$

5) Justifier l'existence de M.

Soit un entier $k \in [\![0\,;n-1]\!]$.
Nous allons chercher à majorer $\left|\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(x)\,\mathrm{d}x\right|$, où g_k est la fonction affine qui coïncide avec f en a_k et a_{k+1}.
Pour alléger les notations, on note g la fonction g_k et on pose $\alpha = a_k$, $\beta = a_{k+1}$.
g est donc la fonction affine telle que $f(\alpha) = g(\alpha)$ et $f(\beta) = g(\beta)$.

6) On souhaite montrer la propriété suivante, pour tout $x \in [\alpha\,;\beta]$:

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \frac{M}{2}(\beta - x)(x-\alpha) \qquad (*)$$

a) Justifier que la propriété $(*)$ est vérifiée pour $x \in \{\alpha\,;\beta\}$.

b) Soit $x \in \,]\alpha\,;\beta[$. On introduit la fonction h_x définie par :

$$h_x(t) = f(t) - g(t) - K_x(\beta - t)(t-\alpha)$$

où la constante K_x est choisie de telle sorte que $h_x(x) = 0$.
En exploitant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $c_x \in \,]\alpha\,;\beta[$ tel que $h''_x(c_x) = 0$.

c) Exprimer K_x en fonction de $f''(c_x)$.

d) Conclure quant à la propriété $(*)$.

7) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta (\beta - x)(x - \alpha)\,\mathrm{d}x$, et donner le résultat sous forme factorisée.
On pourra, pour simplifier les calculs, utiliser le changement de variable $x = \varphi(u)$, avec φ la fonction affine telle que $\varphi(0) = \alpha$ et $\varphi(1) = \beta$.

8) En déduire que $\displaystyle\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M(\beta-\alpha)^3}{12}$.

9) Conclure quant à la majoration souhaitée de ε_n.

10) Application : On prend $[a\,;b] = [0\,;1]$ et $f : x \mapsto \frac{4}{1+x^2}$.
Déterminer un entier n tel que T_n soit une valeur approchée de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ à 10^{-6} près.

11) Méthode de Simpson
La méthode de Simpson est analogue à la méthode des trapèzes, sauf qu'on prend pour g_k l'unique fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 qui coïncide avec f en a_k, $m_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ et a_{k+1}. On pose alors : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(x)\,\mathrm{d}x$..

a) Montrer que $S_n = \displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k) + 4f(m_k) + f(a_{k+1})}{6}$. On pourra utiliser un changement de variable affine pour ramener le calcul de $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(x)\,\mathrm{d}x$ à une intégrale sur $[-1\,;1]$.

b) En utilisant une méthode similaire à la précédente, obtenir une majoration de $\varepsilon'_n = |I - S_n|$.

c) En reprenant le même exemple que dans la question **10**, déterminer n tel que $\varepsilon'_n \leqslant 10^{-6}$.

Projet G : Modèles d'évolution d'une population (d'après CAPES 2024)

Dans ce problème, on s'intéresse à différents modèles d'évolution d'une population. Les trois parties sont indépendantes.

Partie A : le modèle logistique discret

Dans cette partie, on modélise la taille de la population par une suite (u_n) où n est un entier naturel qui désigne le temps écoulé depuis un instant donné pris pour origine.
On suppose que la taille de la population est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n < M$$

Dans toute cette partie, on suppose $0 < u_0 < M$, et on pose $v_n = \frac{u_n}{M}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On a alors $v_0 \in]\,0,1[$.
On suppose qu'il existe un réel a tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = a v_n \left(1 - v_n\right)$$

Le but de cette partie est d'étudier le comportement de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $0 < a \leqslant 1$ et de faire une étude numérique pour le cas $a = \frac{5}{2}$.
Le cas $0 < a \leqslant 1$.
On rappelle que $v_0 \in]\,0,1[$.
On considère les fonctions f_a et g_a définies sur $[0,1]$ par

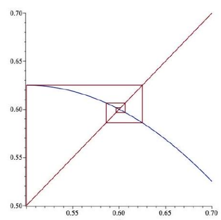
$$\forall x \in [0,1], \quad f_a(x) = ax(1-x) \text{ et } g_a(x) = f_a(x) - x.$$

1. Dresser le tableau des variations de la fonction f_a sur l'intervalle $[0,1]$.
2. Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \in [0,1]$.
3. Démontrer que si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0,1]$, alors ℓ est un point fixe de f_a, c'est-à-dire que $f_a(\ell) = \ell$.
4. Démontrer que f_a admet 0 pour unique point fixe dans l'intervalle $[0,1]$.
5. Démonter que $g_a(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]\,0,1\,[$. On pourra utiliser que $1 - \frac{1}{a} \leqslant 0$.
6. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
7. Justifier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel que l'on déterminera.
8. Que prédit le modèle sur l'évolution de la taille de la population dans ce cas ?

Le cas $a = \frac{5}{2}$.
On pose $v_0 = \frac{1}{2}$. On introduit les fonctions f, g et h définies pour $x \in [0,1]$, par

$$f(x) = \frac{5}{2}x(1-x), g(x) = f(x) - x \text{ et } h(x) = f \circ f(x) - x.$$

9. Démontrer que f admet sur $[0,1]$ exactement deux points fixes.
10. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4. On donnera les valeurs décimales à 10^{-3} près.
11. Écrire un algorithme qui permet de calculer les 10 premiers termes de la suite (v_n). En déduire v_{10}.
12. Dans un repère orthonormé on a représenté, sur le graphique ci-dessous, pour des abscisses comprises entre 0,5 et 0,7 :
    — la courbe représentative de la fonction f,
    — la droite d'équation $y = x$.



Reproduire le graphique en mettant en évidence les nombres v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4.

13. Vérifier que l'on a

$$\forall x \in [0,1], h(x) = -\frac{x(5x-3)\left(25x^2-35x+14\right)}{8}$$

14. En déduire que les fonctions f et $f \circ f$ ont les mêmes points fixes sur $[0,1]$.
15. Etudier le signe de la fonction h sur l'intervalle $\left[0, \frac{3}{5}\right]$.
16. On admet que l'intervalle $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ est stable par la fonction $f \circ f$. Déduire de la question précédente que la suite $\left(v_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
17. Démontrer que la suite $\left(v_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{3}{5}$.
18. En déduire que la suite $\left(v_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers $\frac{3}{5}$, puis que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{3}{5}$.
19. Conclure sur le comportement asymptotique de la taille de la population prédit par le modèle.

Partie B : Le modèle logistique continu

Dans cette partie, on modélise l'évolution de la population par une fonction. La taille de la population à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ est représentée par le réel $y(t)$ où y désigne une fonction de $\mathbb{R}_+$vers $\mathbb{R}_+$.
On suppose que la taille de la population est bornée par un réel strictement positif M, c'est-à-dire que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 < y(t) < M$$

On suppose qu'il existe un réel strictement positif a tel que y soit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ solution de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t) = ay(t)(M - y(t))$$

20. (a) Démontrer qu'il existe des réels α, β que l'on déterminera tels que pour tout réel z vérifiant $0 < z < M$,

$$\frac{1}{z(M-z)} = \alpha\frac{1}{z} + \beta\frac{1}{M-z}.$$

En déduire que y vérifie l'équation :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha\frac{y'(t)}{y(t)} + \beta\frac{y'(t)}{M-y(t)} - a = 0$$

(b) Déterminer en fonction de a et de M, une primitive de la fonction

$$\psi : t \mapsto \alpha\frac{y'(t)}{y(t)} + \beta\frac{y'(t)}{M-y(t)} - a \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

21. Déduire de la question précédente qu'il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$y(t) = \frac{cM\mathrm{e}^{aMt}}{1 + c\mathrm{e}^{aMt}}.$$

22. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.
23. Qu'en déduire sur l'évolution de la population prédite par le modèle ?

Partie C : Un modèle proies-prédateurs discret

On s'intéresse dans cette partie à l'évolution de deux populations dans le même milieu : une population de proies, et une population de prédateurs. En préliminaire, on étudie les suites (x_n) et (y_n) définies par les relations de récurrence suivantes.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - \alpha y_n \\ y_{n+1} = y_n + \alpha x_n \end{cases}$$

où α est un réel strictement positif et indépendant de n.

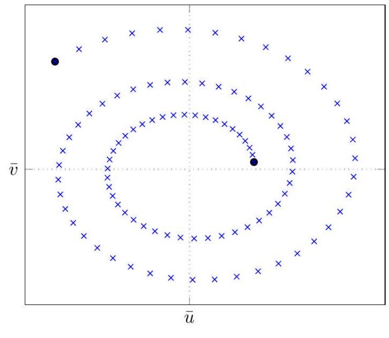
24. On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$.
    (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ à l'aide de $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et A.
    (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
25. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.
26. Montrer que $A = P \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{i}\alpha & 0 \\ 0 & 1 - \mathrm{i}\alpha \end{pmatrix} P^{-1}$.
27. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = P \begin{pmatrix} (1 + \mathrm{i}\alpha)^n & 0 \\ 0 & (1 - \mathrm{i}\alpha)^n \end{pmatrix} P^{-1}$.
28. Justifier l'existence de $r \in \mathbb{R}_+^\star$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $1 + \mathrm{i}\alpha = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $1 - \mathrm{i}\alpha = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, et donner l'expression de r en fonction de α.
29. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_n = r^n \left(\cos(n\theta)x_0 - \sin(n\theta)y_0\right), \\ y_n = r^n \left(\sin(n\theta)x_0 + \cos(n\theta)y_0\right). \end{cases}$$

On propose dans la suite un modèle discret pour suivre l'évolution des populations de proies et de prédateurs. L'entier n désigne le temps écoulé depuis un instant donné pris pour origine. Les tailles des populations de proies et de prédateurs sont respectivement données par les suites (u_n) et (v_n) définies par :

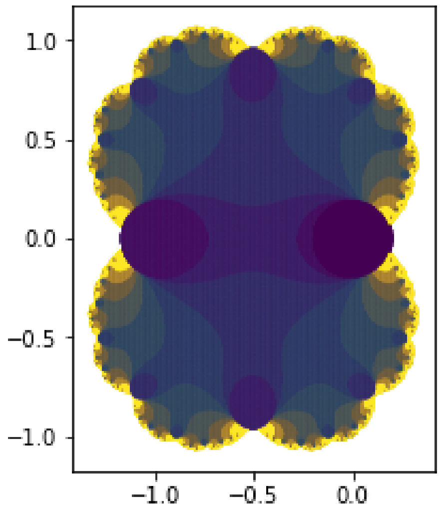
$$\begin{cases} u_n = \bar{u} + x_n, \\ v_n = \bar{v} + y_n, \end{cases}$$

où les réels strictement positifs $\bar{u}$ et $\bar{v}$ sont fixés et correspondent à des tailles de référence pour les populations de proies et de prédateurs. On a tracé sur le graphique ci-dessous les points de coordonnées (u_n, v_n) pour les premières valeurs de n comprises entre 0 et un entier N strictement positif.



30. Faire une description qualitative de l'évolution des populations de proies et de prédateurs prédite par le modèle.
31. On suppose que x_0 et y_0 ne sont pas tous les deux nuls. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $x_n^2 + y_n^2$, en fonction de r, x_0, y_0 et en déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peuvent pas être toutes les deux bornées. Discuter de la pertinence du modèle.

Projet H : Ensemble de Julia



Soient $a \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto z + z^2 \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$. On pose $g = f \circ f$. On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = f(z_n).$$

Pour tout entier naturel n, on note x_n (resp. y_n) la partie réelle (resp. imaginaire) de z_n. On note O, I, J les points d'affixes respectives $0, -\frac{1}{2}, -1$. Pour tout point A du plan et tout réel $r > 0$, $\mathbb{D}(A, r)$ désigne le disque ouvert de centre A et de rayon r.

Partie I : Généralités

1. *Points fixes.* Déterminer l'ensemble des points fixes de f puis l'ensemble des points fixes de g.
2. *Antécédent(s).* Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) = f(z_0)$.

Partie II : Comportements de la suite (z_n)

On rappelle que, sauf mention contraire, les hypothèses effectuées dans une question ne sont valables que dans la question considérée.

3. En supposant que la suite (z_n) converge, déterminer sa limite[1].
4. On suppose que la suite (z_{2n}) converge.
   (a) Déterminer les valeurs possibles de sa limite.
   (b) Monter que (z_{2n+1}) converge et déterminer sa limite en fonction de celle de la suite (z_{2n}).
5. On suppose que a est réel.
   (a) Étudier la monotonie de la suite (z_n).
   (b) Discuter, en fonction de a, de la nature et de la limite éventuelle de la suite (z_n).
6. On suppose que les suites (x_n) et $(|y_n|)$ convergent vers x et y_{abs}.
   (a) Déterminer les valeurs possibles du couple (x, y).
   (b) Démontrer que (z_{2n}) et (z_{2n+1}) convergent et déterminer les limites éventuelles.
7. On suppose que la suite $(|z_n|)$ converge.
   (a) Montrer que la suite $(|1 + z_n|)$ converge vers 1.
   (b) En déduire que (x_n) et $(|y_n|)$ convergent.
   (c) En déduire les valeurs possibles de la limite de la suite $(|z_n|)$.

1. On peut définir la continuité (et les propriétés qui en découlent) des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ comme pour celles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Ce n'est pas l'objet ici, vous pouvez donc utiliser directement les propriétés classiques sans les redémontrer.

Partie III : Ensemble de convergence

On note Ω l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles la suite (z_n) converge et on considère l'ensemble

$$\Delta = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; -1 < \mathfrak{Re}(z) < 0, \mathfrak{Im}(z)^2 < \mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Re}(z) + 1 \right\}$$

8. (a) Montrer que $\Delta \subset \mathbb{D}(O, \sqrt{2})$.
   (b) Démontrer que $f(\Delta) \subset \mathbb{D}(J, 1)$.
   (c) *Question préliminaire et calculatoire.* Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,
   $$(x^2 + x - y^2)^2 + x^2 + x - y^2 + 1 - (2x+1)^2 y^2 = (x^2 + x)(x^2 + x + 1 - 6y^2) + (y^2 - 1)^2$$
   (d) En déduire que $f(\Delta) \subset \Delta$.
   (e) En déduire que si $a \in \Delta$, alors $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
   (f) En déduire que $\Delta \subset \Omega$.
9. Posons $r_0 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.
   (a) Montrer que $f\left(\mathbb{D}\left(I, r_0\right)^c\right) \subset \mathbb{D}\left(I, r_0\right)^c$.
   (b) En déduire que $\Omega \subset \mathbb{D}(I, r_0)$.
10. Proposer un algorithme permettant d'obtenir une représentation approchée de Ω. *On représentera Ω dans un carré centré en $(-0.5, 0)$ et de taille 3×3 tout en mettant $\mathbb{D}(I, r_0)$ et Δ en évidence. On peut remarquer que si un terme de la suite (z_n) appartient à $\mathbb{D}(I, r_0)^c$ alors la suite diverge. Par ailleurs si un terme de la suite (z_n) appartient à Δ alors la suite converge.*

Projet I : Approximation de π

Partie A : Dérivées successives de la fonction Arctan

1. Montrer que la fonction Arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Arctan}^{(n)}(0)$. On pourra utiliser un développement limité.

3. Considérons $g : t \mapsto \operatorname{Arctan}'(t)(1+t^2)$.
   (a) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $g^{(m)}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
   (b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Expliciter $g^{(m)}$ à l'aide de la formule de Leibniz.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$(1+t^2)\operatorname{Arctan}^{(n+2)}(t) + 2(n+1)t\operatorname{Arctan}^{(n+1)}(t) + n(n+1)\operatorname{Arctan}^{(n)}(t) = 0\,.$$
   (d) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(\operatorname{Arctan}(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $\sin(\operatorname{Arctan}(t)) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.
   (e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}^{(n+2)}(t)$ est égal à
   $$2(n+1)\operatorname{Arctan}^{(n+1)}(t)\cos\left(\operatorname{Arctan}(t)+\frac{\pi}{2}\right)\cos(\operatorname{Arctan}(t)) - n(n+1)\operatorname{Arctan}^{(n)}(t)\cos^2(\operatorname{Arctan}(t))\,.$$
   (f) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$\operatorname{Arctan}^{(n)}(t) = (n-1)!\cos^n(\operatorname{Arctan}(t))\sin\left(n\operatorname{Arctan}(t) + n\frac{\pi}{2}\right)\,.$$
   (g) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\operatorname{Arctan}^{(n)}$ est bornée et que $\left|\operatorname{Arctan}^{(n)}(t)\right| \leqslant (n-1)!$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie B : Formule de John Machin

Soit $\theta = \operatorname{Arctan}(1/5)$.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ et $b \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ et $a+b \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, rappeler la formule de $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.

2. Calculer $\tan(2\theta)$ puis $\tan(4\theta)$.

3. En déduire la valeur de $\tan\left(4\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. Démontrer la formule de John Machin,
$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\,.$$

Il existe d'autres formules dites de Machin. La dernière en date, proposée par H. Chien-Lih en 2003, stipule que :
$$\frac{\pi}{4} = 183\operatorname{Arctan}\frac{1}{239} + 32\operatorname{Arctan}\frac{1}{1023} - 68\operatorname{Arctan}\frac{1}{5832} + 12\operatorname{Arctan}\frac{1}{113021} - 100\operatorname{Arctan}\frac{1}{6826318} - 12\operatorname{Arctan}\frac{1}{33366019650} + 12\operatorname{Arctan}\frac{1}{43599522992503626068}$$

Partie C : Approximations de π

Dans tout l'exercice, on considère la série suivante, où x est un réel :

$$\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $S_n(x)$ la somme partielle d'ordre n de cette série et, en cas de convergence, $S(x)$ sa somme et $R_n(x)$ son reste d'ordre n.

1. Dans cette question, on considère le cas particulier où $x = 1$.
   (a) La série est-elle absolument convergente ?
   (b) Montrer que les deux suites $(S_{2n}(1))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1}(1))_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   Que peut-on en déduire concernant la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$?

2. Nature de la série dans le cas général.
   (a) Pour quels réels x la série diverge grossièrement ?
   (b) Pour quels réels x la série est-elle absolument convergente ?
   (c) Pour quels réels x la série est-elle convergente ?

3. Dans cette question, on considère un réel x dans $[-1, 1]$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange de Arctan à l'ordre $2n + 1$ en 0.
   On pourra utiliser les résultats sur les dérivées successives de la fonction Arctan.
   (b) En déduire que $S(x) = \operatorname{Arctan}(x)$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{2n+2}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = 4\, S_n(1)$. On remarque que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 4 \operatorname{Arctan}(1) = \pi.$$

   Déterminer un entier naturel n explicite tel que a_n soit une valeur approchée de π à 10^{-100} près.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$b_n = 16\, S_n\left(\frac{1}{5}\right) - 4\, S_n\left(\frac{1}{239}\right).$$

   (a) Montrer que $|\pi - b_n| \leqslant \frac{1}{25^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. *On pourra utiliser la formule de John Machin.*
   (b) Déterminer un entier naturel n explicite tel que b_n soit une valeur approchée de π à 10^{-100} près.
   Comparer avec le résultat de la question 4.

Projet J : Polynômes de Legendre et approximations d'intégrales

On considère l'application φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \varphi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'$.
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel.
On note $U_n = (X^2-1)^n$, $L_n = \frac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$ et a_n désigne le coefficient dominant de L_n.
Le polynôme L_n est appelé *polynôme de Legendre.*

Partie A : Quelques résultats généraux

1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2-1)$.
2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.
3. Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. En utilisant la décomposition $U_n = (X-1)^n(X+1)^n$ et la formule de dérivation de Leibniz, montrer que $L_n(1) = 1$ et $L_n(-1) = (-1)^n$.
5. Pour n non nul, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :
$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$
6. Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :
$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$
Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :
$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$
On pourra utiliser le théorème de Rolle.
7. En déduire que, pour n non nul, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $]-1,1[$.
On les note $x_1, \ldots, x_n$ en convenant que $x_1 < \cdots < x_n$.
On note $A_n = \prod_{k=1}^{n}(X-x_k)$. En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.

Partie B : Étude de l'endomorphisme φ

8. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
9. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

On note φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par φ.
Cet endomorphisme φ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n(P) = \varphi(P)$.

10. On note $M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.
11. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.
12. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question 11, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$.
13. Calculer $\varphi(L_k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. *On pourra utiliser la question 12.*
14. En déduire une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de φ_n est diagonale.

Partie C : Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit : $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

15. Justifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Dans la suite, on notera $\|\cdot\|$ la norme associée.
16. Etablir que : $\forall (P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2,\ \langle\varphi(P),Q\rangle = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t$, puis que : $\langle\varphi(P),Q\rangle = \langle P,\varphi(Q)\rangle$.
17. Montrer que la famille $(L_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est orthogonale. *On pourra utiliser les questions 13 et 16.*

Dans la suite du problème, n est considéré non nul.

18. Montrer que : $\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle P, L_n\rangle = 0$.
19. Exprimer U''_{n+1} comme combinaison linéaire de U_n et U_{n-1} puis établir que $L'_{n+1}-L'_{n-1} = (2n+1)L_n$.
20. En déduire que $\|L_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$. On pose alors $Q_k = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}L_k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
    Que peut-on dire de la famille $(Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$?
21. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Montrer que $d(P,\mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum\limits_{k=0}^{n}\langle P, Q_k\rangle^2$.

Partie D : Application à l'approximation d'intégrales

22. Soit h une application de classe $\mathscr{C}^n$ de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annule en $n+1$ points distincts.
    Montrer qu'il existe $c\in[-1,1]$ tel que $h^{(n)}(c)=0$.
23. Pour $i\in[\![1,n]\!]$, on note ℓ_i l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\ell_i(P) = P(x_i)$. Montrer que $(\ell_1,\dots,\ell_n)$ est libre dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X],\mathbb{R})$.
24. En déduire que pour toute application linéaire ψ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique n-uplet $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ de réels tel que : $\psi = \sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k\ell_k$.
25. Montrer qu'il existe un unique n-uplet $(w_1,\dots,w_n)$ de réels tel que :
$$\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\quad \int_{-1}^{1}P(t)\mathrm{d}t = w_1P(x_1)+\cdots+w_nP(x_n).$$
26. Montrer que la relation de la question 25 reste vérifiée pour tout P de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. *On pourra, pour $P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, utiliser la division euclidienne de P par L_n et la question 18.*
27. Soit $i\in[\![1,n]\!]$. On note $B_i = \prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(X-x_k)$. Montrer que $\langle L_n, B'_i\rangle = 0$ puis que $\langle L'_n, B_i\rangle = \frac{2}{a_n(1-x_i^2)}$.
    Par ailleurs, montrer que $\langle L'_n, B_i\rangle = w_iL'_n(x_i)B_i(x_i)$. En déduire que $w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)L_n'^2(x_i)}$.

Dans la suite du problème, f désigne une application de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$.

28. Montrer que : $\exists! H_n\in\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\begin{cases} H_n(x_i) = f(x_i)\\ H'_n(x_i) = f'(x_i)\end{cases}$. *On pourra introduire l'application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ qui à P associe : $(P(x_1),\dots,P(x_n),P'(x_1),\dots,P'(x_n))$.*
29. Soit $x\in[-1,1]$ tel que : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x\neq x_i$.
    Montrer que : $\exists c\in[-1,1]$, $f(x)-H_n(x) = \dfrac{A_n(x)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(c)$. *On pourra introduire une application g définie sur $[-1,1]$ par $g : t\mapsto f(t)-H_n(t)-\dfrac{A_n(t)^2}{(2n)!}K$, où K est un réel dépendant de x choisi de sorte que $g(x)=0$, et utiliser la question 22 pour la fonction g' afin de prouver que $g^{(2n)}$ s'annule.*
30. Montrer que : $\forall y\in[-1,1]$, $\exists c\in[-1,1]$, $f(y)-H_n(y) = \dfrac{A_n(y)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(c)$.
31. Justifier l'existence de $M_{2n}(f) = \max\limits_{t\in[-1,1]}|f^{(2n)}(t)|$, puis prouver que :
$$\left|\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t - (w_1f(x_1)+\cdots+w_nf(x_n))\right| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!}\int_{-1}^{1}A_n(t)^2\mathrm{d}t.$$
32. Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\int_{-1}^{1}A_n(t)^2\mathrm{d}t$.