Devoir surveillé $n°6$ du samedi 27 avril 2024

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Durée : 2h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Problème A : [12pts]

On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $n \in [\![2, +\infty[\![$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler, sans démonstration, la nature de cette série lorsque $\alpha = 0$.
2. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_-$ et $n \in [\![3, +\infty[\![$, $(\ln n)^{-\alpha} \geqslant 1$.
3. En déduire la nature de la série $\sum u_n$ lorsque $\alpha \leqslant 0$.
4. Dans cette question, on suppose que $\alpha > 0$.
   (a) Montrer que la fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{t\,(\ln t)^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[2; +\infty[$.
   (b) À l'aide d'un changement de variable, calculer, pour $n \in [\![2, +\infty[\![$, la valeur de l'intégrale
   $$I_n = \int_2^n f(t)\mathrm{d}t$$
   On pourra distinguer le cas où $\alpha = 1$.
   (c) En déduire que la suite (I_n) est bornée si et seulement si $1 < \alpha$.
   (d) Montrer que, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, $I_{n+1} \leqslant \sum_{k=2}^{n} u_k \leqslant I_n + u_2$.
   (e) En déduire la nature de la série $\sum u_n$ en fonction de α.
5. (a) Déterminer un équivalent simple de la suite $\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.
   (b) Déterminer la nature de la série suivante : $\sum \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

Problème B : [12pts]

Considérons l'application définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4b-a & 3b-a \\ c+d & 4d-2c \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Notons $\mathscr{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et A la matrice de f dans cette base. Expliciter A puis calculer son déterminant. Que peut-on en déduire sur l'endomorphisme f ?
3. Posons $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$.
   (a) À l'aide d'un déterminant, montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer $P_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}}$ puis $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_c}$.
   (c) Exprimer chaque élément de la famille $f(\mathscr{B})$ comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{B}$. En déduire $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. On notera par la suite T cette matrice.
   (d) Donner, sans justification, la relation qui lie A et T.
   (e) Calculer le déterminant et la trace de la matrice T puis commenter.
   (f) Exprimer T comme la somme d'une matrice diagonale et d'une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. En déduire T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f^n)$.

Problème C : [12pts]

Si i et j sont deux entiers naturels, on note $S_{i,j}$ (respectivement $S'_{i,j}$) l'ensemble des familles

$$u = (u_k)_{k\in[\![0,i]\!]}$$

à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $u_0 + u_1 + \cdots + u_i = j$ (respectivement $u_0 + u_1 + \cdots + u_i \leqslant j$).

1. *Question préliminaire :* Démontrer l'égalité suivante, pour tous entiers naturels n et p :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}.$$

2. Vérifier que $S_{i,j}$ et $S'_{i,j}$ sont des ensembles finis.

Dans la suite, on note $s_{i,j}$ et $s'_{i,j}$ les cardinaux respectifs de $S_{i,j}$ et $S'_{i,j}$.

3. Calculer $s_{1,2}$ et $s'_{1,2}$.
4. Calculer $s_{i,j}$ et $s'_{i,j}$ lorsque $i = 0$ ou $j = 0$.
5. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{i,j}: & S_{i+1,j} & \longrightarrow & S'_{i,j} \\ & u & \longmapsto & u\big|_{[\![0,i]\!]} \end{array}$$

   est bien définie et qu'elle est bijective.
6. Montrer que $s'_{i,j+1} = s_{i,j+1} + s'_{i,j}$ et en déduire que $s'_{i+1,j+1} = s'_{i,j+1} + s'_{i+1,j}$.
7. Démontrer que $s'_{i+1,j} = \displaystyle\sum_{k=0}^{j} s'_{i,k}$.
8. Prouver que $s'_{i,j} = \dbinom{i+j+1}{i+1}$.
9. En déduire la valeur de $s_{i,j}$.