Devoir surveillé $n°5$ du <u>samedi 9 mars 2024</u>

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Durée : 3h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Problème A : [14pts]

Partie 1

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel usuel $(\mathbb{R}^3, +, .)$. On pose

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 4x - 2y - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(u_0) \quad \text{avec} \quad u_0 = (1, 1, 1)\,.$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sans utiliser de sous-espace vectoriel engendré.
2. Déterminer une base de F.
3. Justifier très rapidement que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de G.
4. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Partie 2

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et φ une forme linéaire non nulle sur E i.e. $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \backslash \{0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})}\}$.

5. Justifier qu'il existe $u_1 \in E$ tel que $\varphi(u_1) \neq 0$. En déduire qu'il existe $u_0 \in E$ tel que $\varphi(u_0) = 1$.

On introduit l'application f définie sur E par $f(x) = x - \varphi(x).u_0$ pour tout $x \in E$.

6. Montrer que f un endomorphisme de E.
7. Démontrer que :
   (a) f est un projecteur.
   (b) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u_0)$.
   (c) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Partie 3

On reprend les notations de la partie 1 et on définit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & 4x - 2y - z \end{array}$$

8. Vérifier que l'application φ est linéaire et que $\varphi(u_0) = 1$.
9. En utilisant les résultats de la partie 2 retrouver le fait que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
10. Retrouver une nouvelle fois ce résultat en utilisant une autre méthode.

Problème B : [14pts]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation notée (E_n) suivante :

$$x - \ln(x) = n$$

et on introduit la fonction suivante :

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \ln(x) - n \end{array}$$

de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, x est une solution de l'équation (E_n) si et seulement si x est un point d'annulation de la fonction f_n.

Étude des fonctions f_n

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les variations strictes de la fonction f_n et ses limites aux extrémités de son domaine de définition.

Résolution de (E_n)

2. À l'aide de la fonction f_0, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).
3. De même, donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_1).
4. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Démontrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions, une dans $]0, 1[$ et l'autre dans $]1, +\infty[$. On notera respectivement x_n et y_n ces solutions.

Équivalent de (x_n)

5. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Calculer $f_n(x_n)$ et $f_n(x_{n+1})$ puis en déduire que $x_{n+1} \leqslant x_n$.
6. Montrer que la suite (x_n) converge vers 0.
7. Démontrer que $x_n \sim e^{-n}$.

Développement asymptotique de (y_n)

8. Montrer que $n \leqslant y_n$ pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$. En déduire la limite de la suite (y_n).
9. Montrer que $y_n \sim n$.
10. Démontrer que $y_n = n + \ln(n) + o(1)$.
11. Donner un développement asymptotique de la suite (y_n) à trois termes.

Problème C : *(uniquement si tout le reste a été correctement traité)* [Bonus]

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y^{(3)} - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$$

On admettra que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 3.