Devoir surveillé $n°4$ du samedi 20 janvier 2024

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Durée : 2h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Problème :

1. Considérons
$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$$
   (a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer les variations de f et de f' sur $\mathbb{R}$.
   Pour votre information, les seuls réels utilisés dans le tableau de variations de f' sont -1, 0 et 1.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ si et seulement si $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.
   En déduire que f possède un unique point fixe, noté α, et que $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.
   (d) Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
   Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f au voisinage de 0 ?
   (e) Tracer la courbe représentative de f à l'aide de ces renseignements.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n+u_n^2}$$
   (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) Montrer qu'il existe une constante $C \in]0,1[$ telle que : $\forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], |f'(x)| \leqslant C$.
   (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant C^n$. Conclusion ?
   (d) Déterminer un entier naturel n explicite tel que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$$
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n(n+1)!$ et vérifie
$$P_{n+1} = \left(1+X+X^2\right)P_n' - (n+1)(2X+1)P_n$$
   (b) En remarquant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x+x^2)\,f(x) = 1$ et en utilisant la formule de Leibniz, établir que, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$:
$$P_n + n(2X+1)P_{n-1} + n(n-1)\left(1+X+X^2\right)P_{n-2} = 0$$
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n' = -(n+1)nP_{n-1}$.
   (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les polynômes P_n et P_{n-1} n'ont aucune racine réelle commune.
   (e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n n'admet pas de racine réelle multiple.

On désire améliorer ce résultat en prouvant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n possède exactement n racines réelles deux à deux distinctes. Nous devons établir au préalable une généralisation du théorème de Rolle.

4. Soit a, un réel fixé et g, une fonction définie, continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$ vérifiant

$$g(a) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0\,.$$

   (a) On définit la fonction φ sur le segment $\left[\mathrm{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \left[\mathrm{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}\right[, \varphi(x) = g(\tan x)\,.$$

   Prouver qu'il existe $d \in]\mathrm{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}[$ tel que $\varphi'(d) = 0$.

   (b) En déduire l'existence de $c \in]a, +\infty[$ tel que $g'(c) = 0$.

5. (a) Vérifier que P_0 admet aucune racine, que P_1 a une seule racine qui est réelle, et que P_2 possède exactement deux racines, qui sont réelles et distinctes.

   (b) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$: on suppose que P_n possède n racines réelles distinctes, notées et classées comme : $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.

      i. Montrer que la fonction $f^{(n+1)}$ s'annule au moins $(n-1)$ fois sur l'intervalle $]\alpha_1, \alpha_n[$.

      ii. Montrer que la fonction $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]\alpha_n, +\infty[$.
      De même, prouver que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]-\infty, \alpha_1[$.

      iii. En déduire que le polynôme P_{n+1} possède exactement $(n+1)$ racines réelles distinctes.

   (c) Conclure.