Devoir surveillé $n°3$ du samedi 16 décembre 2023

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Durée : 2h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Cours : [4pts]

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 1 : [12pts]

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle

$$(E) : \quad xy' + y = \cos(x).$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. On note f la fonction (appelée *sinus cardinal*) définie sur $\mathbb{R}^*$ telle que $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et démontrer que la fonction f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On notera encore f son prolongement.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
   $$-\frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) - x \leqslant 0$$
   Pour l'inégalité de gauche, on pourra étudier la dérivée troisième d'une certaine fonction.
   (c) En déduire un encadrement de $\sin(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_-$.
   On pourra utiliser un argument de parité.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)-x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin(x)-x}{x^2}$.
   (e) En déduire que f est dérivable en 0.
3. Déterminer, parmi les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ (respectivement sur $\mathbb{R}_-^*$), les fonctions qui admettent une limite finie en 0^+ (respectivement 0^-).
4. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : [10pts]

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de déterminer une expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de deux manières différentes.

Méthode A :
En utilisant le théorème sur les suites récurrentes linéaire d'ordre 2 du cours, déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Méthode B :
On introduit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
   La réponse à cette question ne sera pas utile pour la suite.
2. Calculer A^2, A^3 et A^4.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n & u_n \\ u_n & u_{n-1} & u_{n-1} \\ u_n & u_{n-1} & u_{n-1} \end{pmatrix}$$

4. Indépendamment de la question précédente, nous allons maintenant chercher à calculer les puissances successives de A.
   (a) Déterminer deux matrices $B, C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} A = 2B - C \\ A^2 = 4B + C \end{cases}$$

   (b) Calculer B^2 et C^2. Puis, sans justifier, donner pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ les valeurs de B^k et C^k.
   (c) Calculer BC et CB.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer A^n en fonction de n, B et C.
5. Conclure en déterminant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.