Devoir surveillé $n°2$ du samedi 18 novembre 2023

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Durée : 3h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Cours : [7pts]

Donner une primitive de :

1. $f_1 : x \mapsto 1 + \tan^2(x)$
2. $f_2 : x \mapsto \mathbf{e}^{3x} \cos(4x)$
3. $f_3 : x \mapsto x^2 \cos(x)$
4. $f_4 : x \mapsto \frac{\mathbf{e}^x}{1+\mathbf{e}^{2x}}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 6x + 9}$
7. $f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x + 5}$

Exercice 1: [6pts]

Pour tous entiers naturels p et n, on pose $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

1. Donner, sans justifications, les valeurs de $S_0(n)$, $S_1(n)$ et $S_2(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} [(k+1)^p - k^p]$.
3. Exprimer sous forme développée $(k+1)^p - k^p$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} S_i(n) = (n+1)^p$$

5. Vérifier que cette relation est correcte pour $p \in \{1\,;2\,;3\}$.
6. Calculer $S_3(n)$ en utilisant cette relation.

Exercice 2: [15pts]

On considère la fonction $f : x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Le but de l'exercice est de simplifier l'expression de f, en utilisant deux méthodes différentes.

Questions préliminaires :

1. Dresser le tableau de variation de $g : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$.
2. En déduire l'ensemble de définition de f.
3. Quelle est la parité de la fonction f ?
4. Dresser, sans justification, le tableau de variation de Arccos.
5. Dresser le tableau de variation de f en s'aidant uniquement des questions précédentes.

Première méthode : par un calcul de dérivée

6. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f. On le notera D.
7. Calculer et simplifier $f'(x)$ pour tout $x \in D$. On discutera suivant le signe de x.
8. En déduire une expression simplifiée de f.
9. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

Seconde méthode : en utilisant des relations de trigonométrie

Soit $x \in \mathbb{R}$.

10. Justifier qu'il existe un unique réel $\theta \in]-\pi\,;\pi[$ tel que $x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
11. Exprimer $\cos(\theta)$ en fonction de x.
12. En déduire la valeur de θ en fonction de x. On discutera suivant le signe de x.
13. Conclure.

Exercice 3: [6pts]

Considérons une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante. On pose $E = \{x \in [0,1]\,,\, f(x) \geqslant x\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure, que l'on notera b.
2. Montrer que $f(b) = b$.