Devoir surveillé $n°1$ du samedi 30 septembre 2023

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Durée : 3h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 1: [9pts]

1. Traduire avec les quantificateurs universels les assertions suivantes :
   (a) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est constante.
   (b) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.
   (c) La fonction $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ n'est pas minorée.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes.
   (a) $\mathbf{e}^{3\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{7\mathbf{i}x}$ (b) $\cos(x) + \cos(3x)$ (c) $\cos(2x) + \sin(2x)$
3. Soit $f : E \to F$. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Donner la définition mathématique de :
   (a) f est injective ; (b) f est surjective ; (c) $f^{-1}(B)$.

Exercice 2: [4pts]
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercice 3: [6pts]
Établir et démontrer la valeur de vérité de chacune des assertions suivantes :

1. « $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \leqslant y$ »
2. « $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leqslant y$ »
3. « $\exists x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \leqslant y$ »
4. « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leqslant y$ »
5. « $\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ x \leqslant y \Rightarrow \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$ »
6. « $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}_+,\ ac \leqslant bc \Rightarrow a \leqslant b$ »

Exercice 4: [2pts]
Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $nx \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Exercice 5: [6pts]
Résoudre l'équation suivante d'inconnue complexe z :

$$(E) : z^8 + (1 - 3\mathbf{i})z^4 - 4 = 0$$

<u>Exercice 6</u>: [10pts]

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $a = z$, $b = \bar{z}$ et $c = \frac{z^2}{\bar{z}}$.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on pose A, B et C les points images des nombres a, b et c.

1. Soit ρ le module de z et θ un argument.
   Donner les écritures trigonométriques de a, b et c en fonction de ρ et θ.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur ρ et θ pour que :
   (a) les points A et B soient distincts ;
   (b) les points A et C soient distincts ;
   (c) les points B et C soient distincts.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur ρ et θ pour que les points A, B et C soient deux à deux distincts. On suppose désormais que cette condition est réalisée.
4. Montrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.
5. Montrer que $AB = AC$.
6. Placer le point A dans le plan (sur un point quelconque différent de O). Construire le point B puis le point C. On laissera les traits de construction et on justifiera les étapes à l'aide des résultats des questions précédentes.
7. On pose $Z = \frac{c-a}{c-b}$.
   (a) Montrer que $Z = \frac{\sin(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\sin(2\theta)}$.
   (b) Résoudre l'équation $|Z| = 1$ d'inconnue θ.
8. (a) Déterminer l'ensemble des points du plan en lesquels placer le point A pour que le triangle ABC soit équilatéral ?
   (b) Illustrer la réponse sur un exemple de construction. On laissera les traits de construction.

<u>Exercice 7</u>: Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue réelle x : [6pts]

$$(E) : \cos(3x) < \cos(5x)$$