Devoir maison $n°8$ pour le jeudi 8 février 2024

La copie doit être convenablement présentée et rédigée.
Les réponses doivent être justifiées.
Chaque question doit être traitée avec un souci de rigueur et de clarté.
Les résultats essentiels seront encadrés.

Problème de Bâle : « $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ »

Le but de ce devoir est de résoudre le problème de Bâle i.e. montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$.
Ce problème a été résolu par Leonhard Euler en 1735.

On pose $h : t \mapsto \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ et on définit la fonction φ sur $[0,\pi]$ par :

$$\varphi(0) = -1 \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \frac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \text{ pour } t \in \left]0,\pi\right].$$

1. Montrer que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
2. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^\pi h(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour $t \in \left]0,\pi\right]$,
$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t - \int_0^\pi \frac{h(t)}{2}\,\mathrm{d}t$$
5. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que
$$\forall \psi \in \mathscr{C}^1([0,\pi],\mathbb{R}), \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t = 0\,.$$
6. Conclure.

Pour les plus curieux, une vidéo illustrant une réponse géométrique au problème de Bâle.