Devoir maison $n°7$ pour le mardi 30 janvier 2024

La copie doit être convenablement présentée et rédigée.
Les réponses doivent être justifiées.
Chaque question doit être traitée avec un souci de rigueur et de clarté.
Les résultats essentiels seront encadrés.

Méthode de Newton

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$.
On suppose en outre que :

- $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$;
- f' est strictement négative sur $[a, b]$.

Partie I. Principe de la méthode de Newton.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$, que l'on notera α.

Le but de ce problème est de présenter une méthode pour obtenir une valeur approchée de α. Cette méthode consiste, à partir d'une première approximation x_0 de α, à linéariser l'équation $f(x) = 0$ au voisinage de x_0, donc à remplacer f par sa tangente en x_0.

2. Soit $x_0 \in [a, b]$. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $(x_0, f(x_0))$.

On introduit alors la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a, b],\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On obtient ainsi une nouvelle approximation de α en prenant $x_1 = g(x_0)$. En poursuivant, on est ainsi amené à étudier la convergence vers α de la suite (x_n) définie par la relation $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. **Exemple.** Dans cette question, on cherche une approximation de $\sqrt{3}$. Pour cela, on considère la fonction $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3 - x^2$ pour tout $x \in [1, 3]$.
   (a) Montrer que l'on est bien dans le cadre de ce devoir puis tracer la courbe représentative de f.
   (b) Construire graphiquement les trois premiers termes de la suite (x_n) dans le cas où $x_0 = 3$.

Partie II. Étude de la fonction g.

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, et calculer sa dérivée. Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
2. On souhaite prouver qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|g(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|^2$.
   (a) Justifier l'existence d'un couple (m, M) de réels strictement positifs tels que

   $$\forall x \in [a, b],\ |f'(x)| \geq m \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M$$

   (b) Montrer qu'il existe $L \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall t \in [a, b],\ |f(t)| \leq L|t - \alpha|$
   (c) Soit $x \in [a, b]$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur g entre α et x, justifier que

   $$|g(x) - \alpha| \leq \frac{M}{m^2} L |x - \alpha|^2.$$

   (d) Conclure.
3. **Exemple.** Reprenons l'approximation de $\sqrt{3}$. On considère toujours la fonction $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 3 - x^2$. Montrer que, pour tout $x \in [1, 3]$, $|g(x) - \sqrt{3}| \leq 3|x - \sqrt{3}|^2$.

Partie III. Étude de la suite (x_n).

Soit (x_n) la suite récurrente définie par : $\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$

1. On suppose que la suite (x_n) est bien définie.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \alpha| \leq \frac{1}{K}\Big(K|x_0 - \alpha|\Big)^{2^n} \quad (*)$$
   (b) En déduire que, si x_0 est proche de α alors la suite (x_n) converge[1] vers α.
2. **Exemple.** Reprenons l'approximation de $\sqrt{3}$. On considère toujours la fonction $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 3 - x^2$.
   (a) Montrer que la suite (x_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [1,3]$.
   (b) Considérons à présent que $x_0 = 2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \sqrt{3}| \leq \dfrac{1}{3}\Big(0.9\Big)^{2^n}$.
   On pourra montrer au préalable que $1.7 < \sqrt{3} < 2$.
   (c) En déduire que la suite (x_n) converge vers $\sqrt{3}$.
   (d) Combien d'itérations doit-on faire pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$ avec cette méthode ?
   (e) Combien d'itérations doit-on faire pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$ par méthode de dichotomie ?

1. Avec la relation $(*)$, on dit que (x_n) converge vers α à l'ordre 2.