Devoir maison $n°6$ pour le vendredi 12 janvier 2024

La copie doit être convenablement présentée et rédigée.
Les réponses doivent être justifiées.
Chaque question doit être traitée avec un souci de rigueur et de clarté.
Les résultats essentiels seront encadrés.

Irrationalité de $\mathbf{e}^x$ où $x \in \mathbb{Q}^*$

Le but de ce devoir est de démontrer que le nombre $\mathbf{e}^x$ est irrationnel pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $I_n(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \mathbf{e}^{xt} \mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ I_0(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{x}$.

   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ I_1(x) = \dfrac{(2x-2)\mathbf{e}^x + (2x+2)\mathbf{e}^{-x}}{x^3}$.

2. (a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $I_{n+2}(x) = \dfrac{2}{(n+1)!x} \displaystyle\int_{-1}^{1} t(1-t^2)^{n+1} \mathbf{e}^{xt} \mathrm{d}t$.

   (b) Montrer ensuite que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $I_{n+2}(x) = \dfrac{4}{x^2} I_n(x) - \dfrac{4n+6}{x^2} I_{n+1}(x)$.

3. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n de degré n à coefficients entiers pour laquelle

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ I_n(x) = \frac{P_n(x)\mathbf{e}^x - P_n(-x)\mathbf{e}^{-x}}{x^{2n+1}}$$

4. Soit $x \in \mathbb{Q}^*$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{a}{b}$.
   Supposons que $\mathbf{e}^x$ soit un nombre rationnel, que l'on écrit sous la forme $\dfrac{p}{q}$, avec p et q dans $\mathbb{N}^*$.

   (a) Justifier que $pqa^{2n+1} I_n(x)$ est un entier non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) A l'aide d'un encadrement de l'intégrale, montrer que $pqa^{2n+1} I_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (c) Conclure.

5. *Bonus :* exhiber votre puissance sur un corollaire de votre choix.
   - Les nombres $\mathbf{e}$ et $\ln(2)$ sont irrationnels.
   - Pour tout entiers naturels non nuls m et n distincts, $\ln(m) - \ln(n)$ est irrationnel.
   - Votre corollaire.