Devoir maison $n°5$ pour le mardi 12 décembre 2023

La copie doit être convenablement présentée et rédigée.
Les réponses doivent être justifiées.
Chaque question doit être traitée avec un souci de rigueur et de clarté.
Les résultats essentiels seront encadrés.

Intégrale de Gauss

Le but de ce devoir est de calculer l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1) Existence de la limite

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f(x) \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^x t\,\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire que la fonction f est majorée.

Par conséquent, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et est finie : on la note $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2) Un encadrement de $t \mapsto \mathbf{e}^{-t^2}$

En utilisant l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ (valable pour tout $x \in \,]-1;+\infty[$), montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \left[0;\sqrt{n}\right], \quad \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathbf{e}^{-t^2} \leqslant \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

3) Des relations entre plusieurs intégrales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \qquad ; \qquad J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$$

a) Montrer, à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(x)$, que $J_n \leqslant \sqrt{n}\,W_{2n-2}$.

b) Également à l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_n = \sqrt{n}\,W_{2n+1}$.

c) À l'aide de ce qui précède, donner un encadrement de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

4) Calcul de l'intégrale de Gauss

On rappelle la limite suivante pour les intégrales de Wallis (W_n), démontrée en travaux dirigés :

$$\sqrt{n}W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Conclure quand à la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.