Devoir maison $n°3$ pour le <u>mardi 7 novembre 2023</u>

La rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.
Les résultats de chaque question doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$ ou <u>soulignés</u>.

Partie A : continuité et dérivabilité des fonctions circulaires

Le but de cette partie est de démontrer **sans prérequis** la continuité et la dérivabilité des fonctions circulaires. Les seuls résultats sur les fonctions circulaires que vous pouvez utiliser sont les formules prouvées dans le chapitre sur les complexes.

1. **<u>Des inégalités utiles</u>**
   (a) Dessiner le cercle unité et placer $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ pour $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   (b) En comparant les aires de deux triangles et d'un secteur circulaire sur votre dessin, montrer que
   $$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$
2. **<u>Continuité en 0</u>**
   (a) Montrer que sinus est continue en 0.
   (b) Montrer que $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[,\ 1 - x^2 \leq (\cos(x))^2 \leq 1$.
   (c) En déduire que cos est continue en 0.
3. **<u>Continuité sur $\mathbb{R}$</u>**
   (a) Rappeler les formules pour $\cos(a+h)$ et $\sin(a+h)$ pour $a, h \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que sinus est continue sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.
   (d) Justifier que tangente est continue sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\tfrac{\pi}{2} + k\pi; \tfrac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$.
4. **<u>Des limites utiles</u>**
   (a) Montrer, sans utiliser le taux d'accroissement, que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
   (b) Montrer, sans utiliser le taux d'accroissement, que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$.
5. **<u>Dérivabilité sur $\mathbb{R}$</u>**
   (a) Montrer que sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\sin' = \cos$.
   (b) Montrer que cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\cos' = -\sin$.
   (c) Montrer que tangente est dérivable sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\tfrac{\pi}{2} + k\pi; \tfrac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$ et que $\tan' = \dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.

Partie B : lien entre bijectivité et complémentaire de l'image directe

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que f est surjective si, et seulement si, $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.
2. Montrer que f est injective si, et seulement si, $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
3. Montrer que f est bijective si, et seulement si, $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \overline{f(A)} = f(\overline{A})$.