
Devoir maison n°2 pour le mardi 10 octobre 2023

La rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.
Les résultats de chaque question doivent être encadrés ou soulignés.

Autour de $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Partie A : valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ à l'aide de la méthode de votre choix.

Partie B : valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E) : (z - 1)^5 = (z + 1)^5$ par deux méthodes différentes :

- (a) en utilisant les racines cinquièmes de l'unité;
- (b) en développant les puissances des deux côtés de l'égalité.

Dans chaque cas, on écrira les solutions sous forme algébrique.

2. En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

3. Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Partie C : irrationalité de $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3a)$ en fonction de $\cos(a)$.

2. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est solution de l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

3. Par l'absurde, supposons que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est rationnel. On notera p et q deux entiers naturels, non nuls et premiers entre eux, tels que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{p}{q}$.

- (a) Montrer que p divise q^3 .
- (b) En déduire que $p = 1$. *On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde et le lemme d'Euclide qui stipule que si un nombre premier divise le produit de deux entiers alors il divise un des deux entiers.*
- (c) Conclure quand à l'irrationalité de $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$.