Devoir maison $n°15$ à rendre pour le mardi 19 mai 2026

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le but de ce devoir est de montrer qu'il est impossible de truquer deux dés de sorte que la somme des résultats suive une loi uniforme sur $[\![2;12]\!]$.

Partie A : Fonction génératrice des moments

Pour toute variable aléatoire X sur un espace probabilisé fini $(\Omega\,,\,P)$ telle que X soit à support fini inclus dans $\mathbb{N}$, on appelle fonction génératrice de X la fonction suivante :

$$G_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right)$$

Dans ce devoir, les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé fini $(\Omega\,,\,P)$ et leur support est fini et inclus dans $\mathbb{N}$.

1. Soit X une variable aléatoire. À l'aide le théorème de transfert, justifier que $G_X \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Démontrer que deux variables aléatoires X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.
3. *Exemples.*
   (a) Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli.
   (b) Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi Binomiale.
   (c) Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![2;12]\!]$.
4. *Moments.*
   (a) Soit X une variable aléatoire.
   Calculer $G_X(1)$, $G'_X(1)$, $G''_X(1)$. *On écrira ces deux dernières quantités comme des espérances.*
   En déduire une expression de $\mathrm{E}(X)$ et de $\mathrm{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.
   (b) Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
5. *Somme.*
   (a) Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
   (b) Retrouver alors la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
   (c) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales respectives $\mathscr{B}(n,p)$ et $\mathscr{B}(m,p)$ (où $n, m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0;1]$). Quelle est la loi de $Z = X + Y$?

Partie B : Application à la somme de deux dés

On suppose désormais jusqu'à la fin du devoir que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à support inclus dans $[\![1;6]\!]$. On pose $Z = X + Y$. On souhaite prouver que Z ne suit pas une loi uniforme sur $[\![2;12]\!]$. On raisonne pour cela par l'absurde, en supposant que Z suit une loi uniforme sur $[\![2;12]\!]$.

6. Déterminer les racines de $Q = \frac{1}{11}(1 + X + X^2 + \cdots + X^{10})$. Sont-elles réelles ?
7. Exprimer la fonction génératrice de Z en fonction de Q.
8. Exprimer la fonction génératrice de Z en fonction de celles de X et de Y.
9. En déduire l'existence de deux polynômes Q_1 et Q_2, à coefficients réels, de degré 5 tels que $Q_1 Q_2 = Q$.
10. Conclure.