Devoir maison $n°14$ pour le mardi 14 mai 2024

La copie doit être convenablement présentée et rédigée.
Les réponses doivent être justifiées.
Chaque question doit être traitée avec un souci de rigueur et de clarté.
Les résultats essentiels seront encadrés.

Matrice de Vandermonde et interpolation polynomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On considère l'application suivante :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto & (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array}$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Justifier que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$
où $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et de $\mathbb{R}^n$ respectivement.
Cette matrice est appelée la matrice de Vandermonde de $x_1, \dots, x_n$.
3. Le but de cette question est de montrer que l'application φ est un isomorphisme si et seulement si les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont distincts.
   (a) Supposons qu'il existe $i, j \in [\![1; n]\!]$ tels que $i \neq j$ et $x_i = x_j$.
   Montrer que φ n'est pas surjective en majorant son rang.
   (b) Supposons que les scalaires $x_1, \dots, x_n$ soient distincts.
   Montrer que φ est injective en utilisant son noyau.
   (c) Conclure.

On suppose à présent que les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont distincts. Par conséquent, φ est un isomorphisme.

4. L'application φ est bijective d'où $\forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \varphi(P) = (y_1, \dots, y_n)$.
Ce polynôme P est appelé le polynôme de Lagrange pour les points d'interpolation $((x_i, y_i))_{i \in [\![1;n]\!]}$.
Autrement dit, c'est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.
   (a) Exprimer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P)$ en fonction de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}((y_1, \dots, y_n))$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\varphi)$.
   (b) En déduire l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0) = P(2) = 1$ et $P(1) = P(3) = 4$.
5. Le but de cette question est de calculer le déterminant de Vandermonde de $x_1, \dots, x_n$, c'est-à-dire calculer $\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\varphi))$. On note $V_n(x_1, \dots, x_n)$ ce déterminant.
   (a) Calculer $V_1(x_1)$ et $V_2(x_1, x_2)$.
   (b) Sans utiliser la règle de Sarrus, écrire $V_3(x_1, x_2, x_3)$ comme produit de 3 facteurs.
   (c) Supposons à présent que $n \geqslant 2$.
   En développant par rapport à la dernière ligne, justifier que $V_n(x_1, \dots, x_{n-1}, X)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On note D ce polynôme, déterminer son coefficient dominant.
   (d) Montrer que $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont racines de D.
   (e) En déduire une écriture factorisée de D.
   (f) Déterminer une relation entre $V_n(x_1, \dots, x_n)$ et $V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$.
   (g) Conclure. Cette formule reste-t-elle vraie dans le cas où les $x_1, \dots, x_n$ sont non distincts ?
   (h) Ce résultat est-il en adéquation avec celui de la question 3 ?