Devoir maison $n°13$ pour le mardi 23 avril 2024

La copie doit être convenablement présentée et rédigée.
Les réponses doivent être justifiées.
Chaque question doit être traitée avec un souci de rigueur et de clarté.
Les résultats essentiels seront encadrés.

Interpolation de Hermite

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathscr{D}([a,b],\mathbb{R})$.

Partie A : Polynôme d'interpolation de Hermite
On considère l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(a), P'(a), P(b), P'(b)) \end{array}$$

1. Démontrer que Φ est un isomorphisme.
2. En déduire qu'il existe un unique polynôme $H \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $H(a) = f(a)$, $H'(a) = f'(a)$, $H(b) = f(b)$, $H'(b) = f'(b)$. *Ce polynôme est le polynôme d'interpolation de Hermite de f sur $[a,b]$.*

Partie B : Intégrale du polynôme d'interpolation de Hermite
On introduit l'application

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

On note $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_4$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^4$. Pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, on pose $P_k = (X-a)^k$ puis $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$. Pour simplifier les écritures, on notera $\delta = b - a$.

3. Démontrer que la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Déterminer la représentation matricielle de l'application linéaire Φ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{E}_4$. On notera A cette matrice. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta} & \frac{3}{\delta^2} & -\frac{1}{\delta} \\ \frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix}$.
5. Justifier que l'application Ψ est linéaire et déterminer sa représentation matricielle relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{E}_1$. On notera B cette matrice.
6. Exprimer $\displaystyle\int_a^b H(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de Ψ, Φ et d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^4$ à préciser.
7. En déduire, via une opération matricielle, que $\displaystyle\int_a^b H(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\delta}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{\delta^2}{12}(f'(a) - f'(b))$.

Partie C : Contrôle de l'erreur commise sur l'intégrale
On suppose à présent que f est de classe $\mathscr{C}^4$.

8. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que $\forall t \in [a,b]$, $|f^{(4)}(t)| \leqslant M$.
9. On note h la fonction polynomiale d'interpolation de Hermite de f sur $[a,b]$. On pose $d = f - h$.
   (a) Justifier que d est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $[a,b]$ et que $d^{(4)} = f^{(4)}$.
   (b) Démontrer que d' s'annule en trois points distincts sur $[a,b]$ puis que $d^{(3)}$ s'annule sur $[a,b]$.
   (c) *Lemme.* Soit $g \in \mathscr{D}([a,b],\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$ et $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $|g'(t)| \leqslant K$. Montrer alors que pour tout $t \in [a,b]$, $|g(t)| \leqslant K(b-a)$.
   (d) En déduire que $\forall t \in [a,b]$, $|d(t)| \leqslant M(b-a)^4$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $s = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ la subdivision régulière du segment $[a, b]$.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose h_k la fonction polynomiale d'interpolation de Hermite de f sur le segment $[t_k, t_{k+1}]$. Dorénavant, on réemploie la lettre h pour définir la fonction définie sur $[a, b]$ par $h(b) = f(b)$ et dont la restriction sur $[t_k, t_{k+1}[$ est égale à h_k pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
    (a) Montrer que la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.
    (b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Donner une majoration de $\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) - h_k(t)\,\mathrm{d}t\right|$ dépendant de M, a, b et n.
    (c) Montrer que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{M(b-a)^5}{n^4}$.
    (d) À l'aide de la partie précédente, montrer que

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)\right) + \frac{(b-a)^2}{12n^2}\left(f'(a) - f'(b)\right).$$

Partie D : Exemple d'application avec l'approximation de π

11. Écrire une fonction python basée sur l'interpolation de Hermite permettant d'obtenir une approximation de π. *On pourra s'intéresser à l'intégrale de la fonction* $t \mapsto \frac{4}{1+t^2}$ *entre* 0 *et* 1.