Devoir maison $n°12$ pour le mardi 2 avril 2024

La copie doit être convenablement présentée et rédigée.
Les réponses doivent être justifiées.
Chaque question doit être traitée avec un souci de rigueur et de clarté.
Les résultats essentiels seront encadrés.

Formule de Stirling

Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling, du nom du mathématicien écossais James Stirling,

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n\, \mathbf{e}^{-n}$$

Partie A : Équivalent de $n!$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln\left(\dfrac{n^n\,\mathbf{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}\right)$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = -1 + \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
2. En déduire que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.
3. Montrer que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, en déduire la nature de la suite (u_n).
4. Démontrer qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+^*$, nommée *constante de Stirling*, tel que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K\, n^n\, e^{-n}\sqrt{n}.$$

Partie B : Intégrale de Wallis

On définit la suite des intégrales de Wallis $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

5. *Une relation de récurrence.*
   (a) Calculer W_0 et W_1.
   (b) Justifier que (W_n) est une suite de réels strictement positifs.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+1} = nW_{n-1} - nW_{n+1}$ i.e. $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}W_{n-1}$.
6. *Équivalent.*
   (a) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = nW_{n-1}W_n$.
   Montrer que (u_n) est une suite constante et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n-1}W_n = \dfrac{\pi}{2n}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n-1}$.
   (c) Montrer alors que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
7. *Expression explicite des termes pairs et calcul de la constante de Stirling.*
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}W_0$.
   (b) En déduire que $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{K\sqrt{2n}}$ où K est la constante de Stirling.
   (c) Conclure en donnant la valeur exacte de K.