Devoir maison $n°11$ pour le mardi 19 mars 2024

La copie doit être convenablement présentée et rédigée.
Les réponses doivent être justifiées.
Chaque question doit être traitée avec un souci de rigueur et de clarté.
Les résultats essentiels seront encadrés.
Les six questions de ce problème sont indépendantes entre elles.

Endomorphismes nilpotents

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou des complexes, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$, avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_E$.

On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est *nilpotent* lorsqu'il existe un entier naturel n tel que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$, où $0_{\mathscr{L}(E)}$ désigne l'endomorphisme nul de E. Lorsque c'est le cas, on appelle *indice de nilpotence* de f l'entier naturel minimal vérifiant cette égalité.

1. Justifier l'existence de l'indice de nilpotence pour un endomorphisme f nilpotent.
2. On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,,\,y\,,\,z) & \longmapsto & (2x+y\,,\,-3x-y+z\,,\,x-z) \end{array}$$

   (a) Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que f est nilpotent, et déterminer son indice de nilpotence.
   (c) Exprimer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ comme des sous-espaces vectoriels engendrés.
   (d) Démontrer que le vecteur $(1, -2, 1)$ appartient à l'image de f.
   En déduire que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
   (e) Sans calculs, déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(x, y, z) = (1, -2, 1)$.
3. On considère l'endomorphisme suivant de $\mathbb{C}[X]$:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f^k)$. L'application f^k est-elle injective ?
   (b) Montrer que l'application f est surjective.
   (c) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^k) = \mathbb{C}[X]$.
   (d) L'endomorphisme f est-il nilpotent ?
4. Soit f un endomorphisme nilpotent de E. On note p son indice de nilpotence.
   (a) Soit k un entier naturel tel que $k \geqslant p$. Déterminer les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f^k)$ et $\mathrm{Im}(f^k)$.
   (b) Démontrer les inclusions $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (c) Démontrer les implications suivantes, pour tout entier naturel k :
      i. $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1}) \implies \mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \mathrm{Ker}(f^{k+2})$
      ii. $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1}) \implies \mathrm{Im}(f^{k+1}) = \mathrm{Im}(f^{k+2})$
   (d) En déduire que les inclusions de la question 4b sont strictes pour tout $k \in [\![0\,;p-1]\!]$.
   Que peut-on en déduire concernant la surjectivité et l'injectivité de f ?
   (e) On suppose de plus que E est de dimension finie. Prouver que $p \leqslant \dim(E)$.
5. Soient f et g des endomorphismes nilpotents de E tels que $f \circ g = g \circ f$.
   Montrer que l'endomorphisme $f + g$ est nilpotent.
6. Soit f un endomorphisme nilpotent de E. Montrer que $\mathrm{id}_E - f$ est un automorphisme et déterminer son endomorphisme réciproque.