Devoir maison $n°10$ pour le mardi 5 mars 2024

La copie doit être convenablement présentée et rédigée.
Les réponses doivent être justifiées.
Chaque question doit être traitée avec un souci de rigueur et de clarté.
Les résultats essentiels seront encadrés.

Nombre de façons de payer avec 1€ et 2€

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note a_n le nombre de manières de payer n euros avec des pièces de un et de deux euros. Mathématiquement, cela signifie que $a_n = \text{Card}\{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i+2j=n\}$.
Le but de ce problème est de déterminer une expression explicite de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.
2. Considérons $f : x \mapsto \frac{1}{1-x-x^2+x^3}$.
   (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.
   (b) En utilisant le produit des développements limités de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ en 0, montrer que :
   $$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$
   L'expression théorique du produit de deux développements limités en 0 *est donné par*
   $$\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \mathrm{o}(x^n)\right)\left(\sum_{j=0}^{n} c_j x^j + \mathrm{o}(x^n)\right) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} d_k x^k + \mathrm{o}(x^n) \text{ où } d_k = \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i+j=k}} b_i c_j$$
3. Factoriser le polynôme $P = 1 - X - X^2 + X^3$ en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
4. En déduire la décomposition de f en éléments simples.
5. Considérons $g : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
   (a) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et calculer $g^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction g.
6. Déduire des questions précédentes le développement limité de f à l'ordre n en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Conclure.
8. À l'aide d'un argument combinatoire, montrer que $a_{n+2} = a_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis retrouver le résultat précédent.