Devoir maison $n°1$ pour le mardi 19 septembre 2023

La rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.
Les résultats de chaque question doivent être encadrés ou soulignés.

Entraînement à la rédaction

Exercice 1:
Montrer que la proposition suivante est fausse en prouvant sa négation.

$$"\forall n \in \mathbb{N},\ (4|n \text{ et } 6|n) \Rightarrow 24|n\,."$$

Exercice 2:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 3:
Montrer que toute fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction affine (i.e. une fonction de la forme $x \mapsto ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$) et d'une fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $h(0) = h'(0) = 0$.

Exercice 4:
Démontrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x + y \geq 7) \implies (x \geq 4 \text{ ou } y \geq 3)\,.$$

Exercice 5:
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(u_0 + \cdots + u_n) \end{cases}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.