Chapitre 28 : Fonctions de deux variables

Table des matières

1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ et fonctions continues **2**
- 1.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ 2
- 1.2 Fonctions continues 2

2 Dérivées partielles **4**
- 2.1 Définition 4
- 2.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et gradient 5

3 Dérivées partielles et composées **8**
- 3.1 Dérivée selon un vecteur 8
- 3.2 Composition à gauche 8
- 3.3 Dérivée selon un chemin 9
- 3.4 Dérivée d'une fonction après un changement de variables 9

4 Extremum et point critique **11**

Dans tout ce chapitre, nous nous concentrerons sur les fonctions à deux variables réelles, qui généralisent la notion de fonction d'une variable en associant un unique réel à chaque paire de nombres réels. Ces fonctions modélisent des phénomènes dans lesquels une quantité dépend de deux paramètres indépendants, comme la température en fonction du temps et de la position, ou l'altitude selon la latitude et la longitude. L'objectif est de comprendre comment ces fonctions varient en fonction de chaque variable et d'en analyser les comportements globaux. Les concepts de dérivées directionnelles, dérivées partielles et gradient sont essentiels pour déterminer les points critiques de fonctions de deux variables et sont utilisés dans de nombreux domaines comme l'optimisation, la mécanique et la physique. Grâce à ces outils, il est possible de détecter les points extremaux de ces fonctions.
Le mathématicien français Joseph Fourier a étudié des équations aux dérivées partielles, des équations dont les inconnues sont des fonctions de plusieurs variables, il s'est concentré principalement sur l'étude de la propagation de la chaleur. Dans son ouvrage majeur, *Théorie analytique de la chaleur* (1822), il introduit une méthode novatrice pour résoudre les équations aux dérivées partielles en décomposant des fonctions en séries trigonométriques.

Joseph Fourier
(1761-1830)

Dans tout le chapitre, $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire, de la norme et de la distance euclidienne.

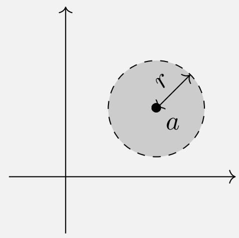
1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ et fonctions continues

1.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Définition 1.1 (boule ouverte de $\mathbb{R}^2$)

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
La boule ouverte de centre a et de rayon r, notée $B(a,r)$, est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont la distance euclidienne à a est strictement inférieure à r *i.e.*

$$B(a,r) = \{b \in \mathbb{R}^2,\ \|a - b\| < r\}.$$



Remarque : On peut définir de manière analogue la boule fermé de centre a et de rayon r par

$$\overline{B}(a,r) = \{b \in \mathbb{R}^2,\ \|a - b\| \leqslant r\}\,.$$

Définition 1.2 (ouvert de $\mathbb{R}^2$)

Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que U est un ouvert si :

$$\forall a \in U, \exists r > 0, \quad B(a,r) \subset U.$$

Remarque : Intuitivement, une partie U est ouverte si U ne contient pas sa "frontière".

Exemple 1.3 :

1. Montrer que le demi-plan $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$ est ouvert.
2. Montrer que le demi-plan $H' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0\}$ n'est pas ouvert.
3. Soit $c \in \mathbb{R}^2$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la boule ouverte $B(c,R)$ est ouverte.

1.2 Fonctions continues

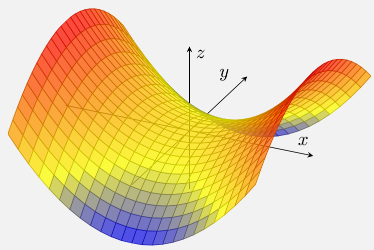
Jusqu'à la fin du chapitre, U désignera un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Notation : Soit f une fonction définie sur U et $a = (x,y) \in U$, on notera indifféremment $f(x,y)$ ou $f(a)$.

Définition 1.4 (graphe)

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.
On appelle **graphe** de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)),\ (x,y) \in U\}.$$



Définition 1.5 (fonction continue)

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que $f(b) \underset{b\to a}{\longrightarrow} \ell$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall b \in U, \qquad \left(\|a - b\| \leqslant \eta \implies |\ell - f(b)| \leqslant \varepsilon \right).$$

- On dit que f est **continue en** a si $f(b) \underset{b\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
- On dit que f est **continue** si, pour tout $a \in U$, f est continue en a.

Vocabulaire : Les points b de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\|a-b\| \leqslant \eta$ sont dits au voisinage de a. C'est l'analogue des voisinages réels, en remplaçant la valeur absolue par la norme (et donc les intervalles $[a-\eta, a+\eta]$ par les boules fermées $\overline{B}(a,\eta) = \{b \in \mathbb{R}^2, \|a - b\| \leqslant \eta\}$).

Exemple 1.6 : Montrez que les fonctions $f_1 : (x,y) \longmapsto x$ et $f_2 : (x,y) \longmapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque : Attention, pour montrer qu'une fonction f de deux variables est continue en (x_0,y_0), il ne suffit pas de montrer que les fonctions $x \mapsto f(x,y_0)$ et $y \mapsto f(x_0,y)$ sont continues respectivement en x_0 et y_0. (c.f. ex. 2.5)

Remarque : La caractérisation séquentielle de la continuité reste valable pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1.7 (stabilité par les opérations algébriques)

Soient $a \in U$ et $f,g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en a.

- Pour tout $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ est continue en a.
- Si $f(a) \neq 0$, alors $1/f$ est continue en a.
- fg est continue en a.
- Si $g(a) \neq 0$, alors f/g est continue en a.

Proposition 1.8 (composition à gauche)

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, I un intervalle contenant $f(U)$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si f est continue en $a \in U$ et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Proposition 1.9 (composition à droite par une fonction d'une seule variable)

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et γ_1,γ_2 deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\gamma : t \longmapsto (\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ soit à valeurs dans U.
Si γ_1 et γ_2 sont continues en $a \in I$ et f continue en $\gamma(a)$, alors $f \circ \gamma : t \longmapsto f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ est continue en a.

Proposition 1.10 (composition à droite par une fonction de deux variables)

Soient V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et γ_1,γ_2 deux fonctions de V dans $\mathbb{R}$ telles que $\gamma : b \longmapsto (\gamma_1(b),\gamma_2(b))$ soit à valeurs dans U.
Si γ_1 et γ_2 sont continues en $a \in V$ et f continue en $\gamma(a)$, alors $f \circ \gamma : b \longmapsto f(\gamma_1(b),\gamma_2(b))$ est continue en a.

2 Dérivées partielles

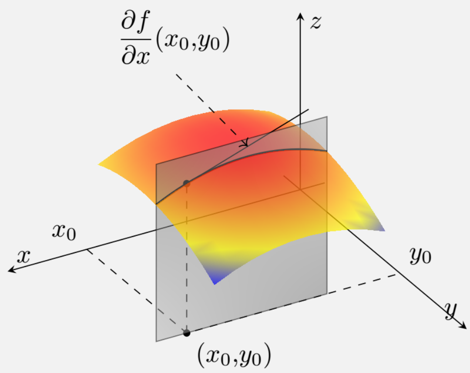
2.1 Définition

Définition 2.1 (dérivées partielles)

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a_0 = (x_0,y_0) \in U$.

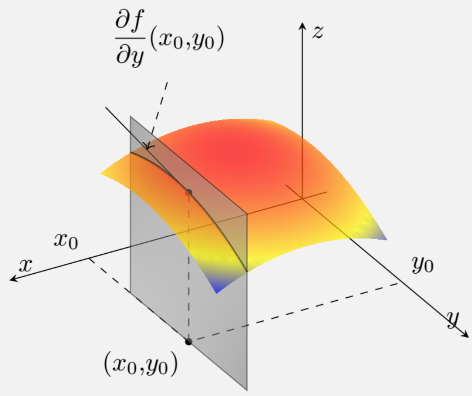
- Si l'application partielle $\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} D_1(y_0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y_0) \end{array} \right.$ définie sur $D_1(y_0) = \{x \in \mathbb{R},\, (x,y_0) \in U\}$, est dérivable en x_0, on dit que f admet une <u>première dérivée partielle</u> en (x_0,y_0) et on note :

$$\partial_1 f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \varphi_1'(x_0).$$



- Si l'application partielle $\varphi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} D_2(x_0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x_0,y) \end{array} \right.$ définie sur $D_2(x_0) = \{y \in \mathbb{R},\, (x_0,y) \in U\}$, est dérivable en y_0, on dit que f admet une <u>deuxième dérivée partielle</u> en (x_0,y_0) et on note :

$$\partial_2 f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \varphi_2'(y_0).$$



Exemple 2.2 :

1. Calculer (si elles existent) les dérivées partielles de la fonction $f : (x,y) \mapsto 2x + 4xy^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x > 0\}$. Calculer (si elles existent) les dérivées partielles de la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y. \end{array} \right.$$

Proposition 2.3 (opérations sur les dérivées partielles)

Soient f,g deux fonctions de U dans $\mathbb{R}$ et $a \in U$.
Si f et g admettent des dérivées partielles en a, alors :

- pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ admet des dérivées partielles en a et :

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \mu \frac{\partial g}{\partial x}(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \mu \frac{\partial g}{\partial y}(a).$$

- fg admet des dérivées partielles en a et :

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)g(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial x}(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(fg)}{\partial y}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)g(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial y}(a).$$

- si g ne s'annule pas en a alors $1/g$ admet des dérivées partielles en a et :

$$\frac{\partial(1/g)}{\partial x}(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a)}{g^2(a)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(1/g)}{\partial y}(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(a)}{g^2(a)}$$

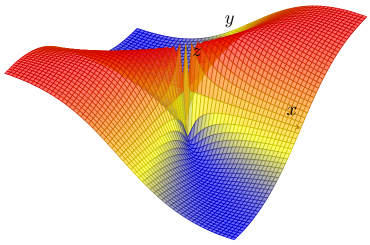
- si g ne s'annule pas en a alors f/g admet des dérivées partielles en a et :

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x}(a) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a)g(a) - f(a)\frac{\partial g}{\partial x}(a)}{g^2(a)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(f/g)}{\partial y}(a) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a)g(a) - f(a)\frac{\partial g}{\partial y}(a)}{g^2(a)}$$

Exemple 2.4 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ polynomiale, i.e. qu'il existe $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]}$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}x^iy^j$. Par produit et combinaison linéaire, f admet des dérivées partielles.

<u>**Attention :**</u> L'existence des dérivées partielles n'implique pas la continuité.

Exemple 2.5 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.



Graphe de f

2.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et gradient

Définition 2.6 (fonction de classe $\mathscr{C}^1$)

Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de <u>classe $\mathscr{C}^1$</u> si f admet des dérivées partielles en tout point de U et si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues.
On note $\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2.7 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ polynomiale, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Définition 2.8 (gradient)

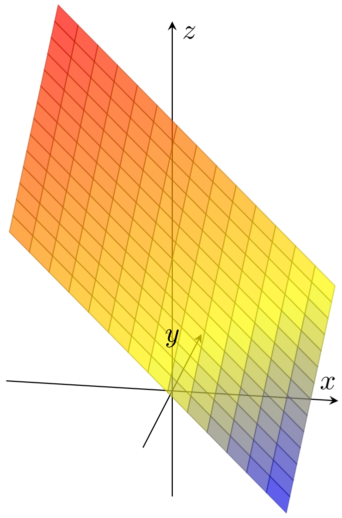
Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$.

On appelle gradient de f et on note ∇f l'application : $\left\{\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ a & \longmapsto & \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) \end{array}\right.$.

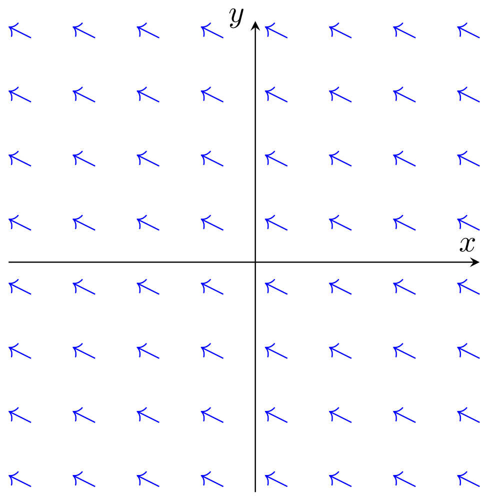
Remarque : L'application ∇f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^2$, c'est un champ de vecteurs. On représente souvent de telles fonctions dans le plan, en affichant pour de nombreux point $a = (x,y)$, le vecteur $\nabla f(x,y)$ en prenant pour origine le point $a = (x,y)$.

Exemples 2.9 :

- Si $f : (x,y) \longmapsto \alpha x + \beta y + \gamma$, alors $\nabla f : (x,y) \longmapsto (\alpha,\beta)$. Le gradient de f est constant.

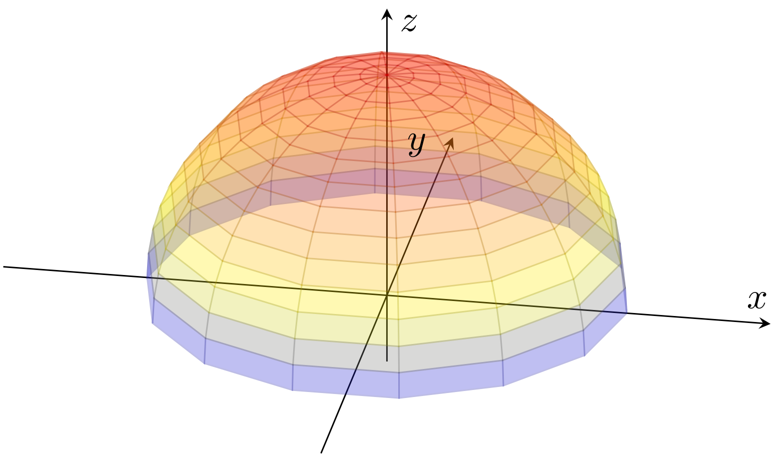


Graphe de f.

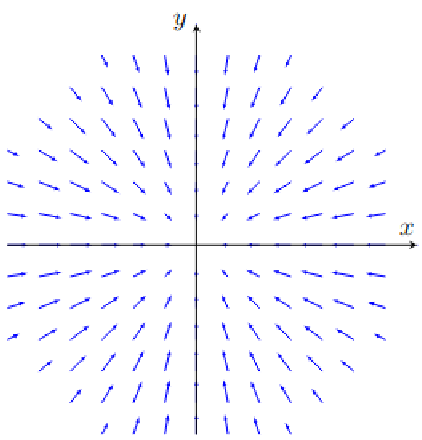


Représentation du champ de vecteurs ∇f.

- Si $f : (x,y) \longmapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ définie sur $B(0,1)$, alors $\nabla f : (x,y) \longmapsto \left(\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$.



Graphe de f.



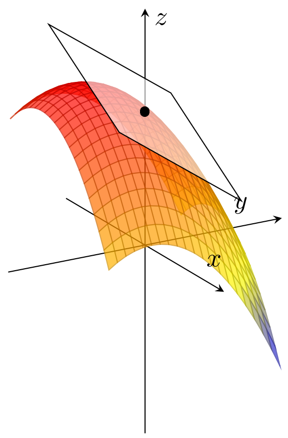
Représentation du champ de vecteurs ∇f.

Théorème 2.10 (développement limité d'ordre 1)

Soient $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $a_0 \in U$.
Alors
$$f(a) \underset{a\to a_0}{=} f(a_0) + (\nabla f(a_0)|a-a_0) + o(\|a-a_0\|),$$

Remarques : Notons (x_0,y_0) les coordonnées de a_0.

- Le théorème précédent affirme que la fonction affine
$$(x,y) \longmapsto f(a_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a_0)$$
approche au premier ordre la fonction f au voisinage de a_0.



- Le plan d'équation
$$\boxed{z = f(a_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a_0)}$$
qui est la graphe de cette fonction affine est appelé le **plan tangent** du graphe de la fonction f en a_0. Ce plan est, parmi tous les plans, la meilleure approximation de la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point a_0.
- Le théorème précédent peut aussi s'écrire :
$$f(x_0+h,y_0+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(a_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a_0) + o(\|(h,k)\|).$$

Corollaire 2.11 (caractère $\mathscr{C}^1$ implique la continuité)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$. Alors f est continue sur U.

Interprétation géométrique du gradient :

On a
$$f(a_0+v) \underset{v\to(0,0)}{=} f(a_0) + (\nabla f(a_0)|v) + o(\|v\|).$$
Justifions le fait que le gradient donne la direction dans laquelle f croît le plus vite.
Supposons que $\nabla f(a_0) \neq 0$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(\nabla f(a_0)|v) \leqslant \|\nabla f(a_0)\|\|v\|$, avec égalité si et seulement si v a le même sens et la même direction que $\nabla f(a_0)$ (c'est-à-dire s'ils sont positivement liés).
Donc l'approximation affine $g : v \longmapsto f(a_0) + (\nabla f(a_0)|v)$ de f en a_0 est maximale pour v qui a même sens et même direction que $\nabla f(a_0)$ parmi l'ensemble des vecteurs v de même norme.

Proposition 2.12 (opérations algébriques sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$)

Soient $f,g \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$.

- $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
- fg est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
- Si g ne s'annule pas sur U, alors $1/g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
- Si g ne s'annule pas sur U, alors f/g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

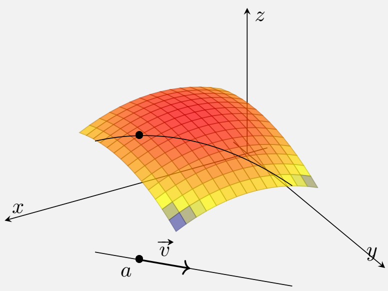
3 Dérivées partielles et composées

3.1 Dérivée selon un vecteur

Définition 3.1 (dérivée directionnelle)

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^2$.
Si $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0, on dit que f admet une dérivée en a selon le vecteur v et on note :

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}.$$



Remarques :

- L'application $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ est définie au voisinage de 0 car U est un ouvert.
- Pour $v=(1,0)$, on a $D_v f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et pour $v=(0,1)$, on a $D_v f(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Proposition 3.2 (le caractère $\mathscr{C}^1$ implique l'existence des dérivées directionnelles)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$, $a \in U$ et $v=(h,k) \in \mathbb{R}^2$.
Alors f admet une dérivée directionnelle en a selon le vecteur v et on a :

$$D_v f(a) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) = (\nabla f(a)|v).$$

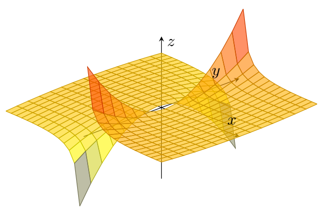
Exemple 3.3 : Calculer la dérivée de l'application $f : (x,y) \mapsto x^2-y^2$ au point $a=(1,2)$ suivant le vecteur $v=(3,5)$ de deux façons différentes.

Remarque : Attention, une fonction peut admettre une dérivée en un point selon n'importe quel vecteur sans être même continue en ce point.

Exemple 3.4 :

Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{y^2}{x} \text{ pour } x\neq 0; \\ y \text{ sinon} \end{cases} \end{array}\right.$.

Montrer que f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ selon n'importe quel vecteur mais n'est pas continue en ce point.



3.2 Composition à gauche

Proposition 3.5 (composition à gauche et dérivation)

Soit I un intervalle non trivial. Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ telle que $f(U) \subset I$ et $g \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$.
Alors, $g \circ f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et pour tout $a \in U$:

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(a) = g'(f(a))\frac{\partial f}{\partial x}(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(a) = g'(f(a))\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

3.3 Dérivée selon un chemin

Théorème 3.6 (première règle de la chaîne)

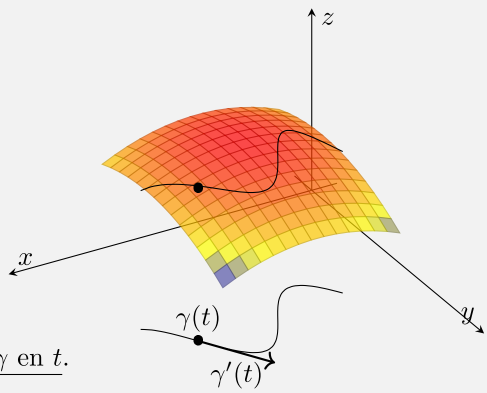
Soient $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et I un intervalle non trivial.
Soit $\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\gamma_1(t),\gamma_2(t)) \end{array} \right.$ tel que γ_1 et γ_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $\gamma(I) \subset U$.
Alors $f \circ \gamma : t \longmapsto f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$
et pour tout $t \in I$:

$$(f \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\gamma_2'(t).$$

En notant $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t),\gamma_2'(t))$, cette égalité s'écrit

$$(f \circ \gamma)'(t) = (\nabla f(\gamma(t))|\gamma'(t))$$

La dérivée $(f\circ\gamma)'(t)$ s'appelle la <u>dérivée de f selon l'arc γ en t</u>.



Remarques :
- La dérivée de f selon l'arc γ en t est égale à la dérivée de f en $\gamma(t)$ selon le vecteur $\gamma'(t)$.
- La conclusion du théorème peut se réécrire $\forall t \in I, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\gamma_2'(t)$.

Exemple 3.7 : Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $g : t \longmapsto f(t^2,t^3)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

<u>**Interprétation géométrique du gradient avec les lignes de niveaux :**</u>

On appelle ligne de niveau d'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ l'ensemble $\{(x,y) \in U,\ f(x,y) = c\}$ où $c \in \mathbb{R}$.
Si la fonction γ paramètre une ligne de niveau, c'est-à-dire si la fonction $f \circ \gamma$ est constante, alors sa dérivée est nulle donc, pour tout $t \in I$, $(\nabla f(\gamma(t))|\gamma'(t)) = 0$; le gradient $\nabla f(\gamma(t))$ est donc orthogonal au vecteur $\gamma'(t)$ qui dirige la tangente au point $\gamma(t)$ de la ligne de niveau.
On dit que le gradient ∇f est orthogonal aux lignes de niveau.

Exemple 3.8 : Considérons $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ et $\gamma : t \mapsto (r\cos(t),r\sin(t))$ où $r \in \mathbb{R}_+$.
Montrer de deux manière différentes que $(\nabla f(\gamma(t))|\gamma'(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3.4 Dérivée d'une fonction après un changement de variables

Théorème 3.9 (deuxième règle de la chaîne)

Soient $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.
Soient $\varphi,\psi \in \mathscr{C}^1(V,\mathbb{R})$ telles que $\Phi : (u,v) \longmapsto (\varphi(u,v),\psi(u,v))$ soit à valeurs dans U.
Alors, l'application $f \circ \Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \end{array} \right.$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $(u,v) \in V$:

- $\dfrac{\partial(f\circ\Phi)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u,v)$;
- $\dfrac{\partial(f\circ\Phi)}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u,v)$.

Remarque : Pour différentier les éléments de U et de V, on a noté (x,y) les éléments de U et (u,v) ceux de V. On a donc noté $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ pour les dérivées partielles de fonctions définies sur U et $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial v}$ pour les dérivées partielles de fonctions définies sur V. On peut toutefois écrire ce théorème uniquement avec x et y.

Exemple 3.10 : Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On définit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos(\theta),r\sin(\theta)) \end{array} \right.$.
Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.

4 Extremum et point critique

Définition 4.1 (extremum)

Soit V une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ (pas forcément ouverte), $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in V$.

- On dit que f admet un maximum en a si : $\forall v \in V,\ f(v) \leqslant f(a)$.
- On dit que f admet un minimum en a si : $\forall v \in V,\ f(v) \geqslant f(a)$.
- On dit que f admet un maximum local en a si : $\exists \eta > 0, \forall v \in V \cap B(a,\eta),\ f(v) \leqslant f(a)$.
- On dit que f admet un minimum local en a si : $\exists \eta > 0, \forall v \in V \cap B(a,\eta),\ f(v) \geqslant f(a)$.
- On dit que f admet un extremum en a si f admet un maximum ou un minimum en a.
- On dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Remarque : La condition $\exists \eta > 0, \forall v \in V \cap B(a,\eta)$ peut simplement se résumer par “au voisinage de a”. Lorsque nous avons donné la notion de voisinage sur $\mathbb{R}$, nous avons mis des inégalités larges mais la notion est équivalente avec des inégalités strictes.

Définition 4.2 (point critique)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $a \in U$.
On dit que a est un point critique de f si $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$, c'est-à-dire si $\nabla f(a) = 0$.

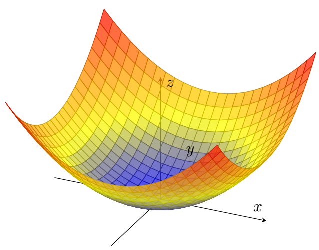
Théorème 4.3 (condition nécessaire pour un extremum local)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $a \in U$.
Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

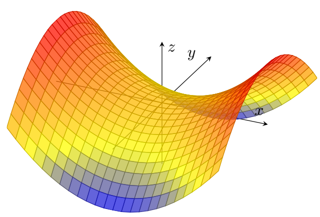
Remarques :

- Ce résultat permet de connaître les extrema locaux possibles en résolvant l'équation $\nabla f(a) = 0$. Il faut ensuite les étudier cas par cas (et étudier la fonction sur le bord du domaine si celui-ci n'est pas un ouvert).
- Attention la réciproque est fausse.

Exemple 4.4 : Soient $f : (x,y) \longmapsto x^2 + y^2$ et $g : (x,y) \longmapsto x^2 - y^2$ définies sur $\mathbb{R}^2$.



Graphe de f.



Graphe de g.

Étudier les extrema de f et de g.