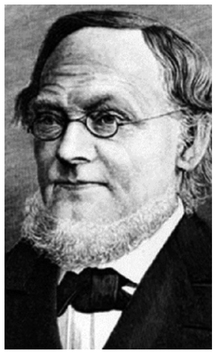
Chapitre 18 : Dimension

Table des matières

La notion de dimension est au cœur des mathématiques modernes et particulièrement de la géométrie et de l'algèbre linéaire. Elle permet de quantifier le « nombre d'axes » nécessaires pour décrire un espace, que ce soit dans des situations aussi simples que la ligne (dimension 1), le plan (dimension 2) ou des espaces plus complexes aux dimensions multiples.
Le concept de dimension dépasse largement les intuitions géométriques classiques grâce aux contributions décisives de plusieurs mathématiciens au XIXe siècle, et en particulier celles d'Hermann Grassmann. En 1844, dans son œuvre révolutionnaire *Die Lineale Ausdehnungslehre*, Grassmann introduit des idées radicales sur les structures algébriques et géométriques, qui allaient bien au-delà de la géométrie euclidienne traditionnelle. Grassmann est l'un des premiers à conceptualiser l'idée de dimensions abstraites dans des espaces vectoriels, où les vecteurs ne sont plus seulement des entités géométriques, mais des objets mathématiques pouvant exister dans des espaces de dimensions arbitraires.



Hermann Grassmann
(1809-1877)

1 Existence de bases

Définition 1.1 (espace vectoriel de dimension finie)

On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie lorsqu'il possède une famille génératrice finie.

Exemple 1.2 : La famille $(1,X,X^2,\dots,X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ donc $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Lemme 1.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $(v_1,\dots,v_n)$ une famille génératrice de E (avec $n \in \mathbb{N}$). Soit I une partie de $[\![1\,;n]\!]$ telle que la sous-famille $(v_i)_{i\in I}$ soit libre.
Alors on peut trouver un ensemble J, avec $I \subset J \subset [\![1\,;n]\!]$, tel que la famille $(v_i)_{i\in J}$ soit une base de E.

Théorème 1.4 (théorème de la base extraite)

De toute famille génératrice finie, on peut extraire une base.

Corollaire 1.5 (existence de bases en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Alors il existe une base de E.

Théorème 1.6 (théorème de la base incomplète)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute famille libre finie peut être complétée en une base.

Méthode : *Pour compléter une famille libre $\mathscr{L}$ en une base, on peut considérer une famille génératrice $\mathscr{G}$ et rajouter successivement des éléments de $\mathscr{G}$ à la famille $\mathscr{L}$ de manière à conserver le caractère libre de la famille, jusqu'à obtenir une base.*

Exemple 1.7 : Soit $\mathscr{F} = ((3,2,-4),(1,1,-2))$ une famille de $\mathbb{R}^3$. Compléter $\mathscr{F}$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

2 Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

2.1 Définition de la dimension

Lemme 2.1 (« lemme de la dimension »)

Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs (avec $n \in \mathbb{N}$), toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Théorème 2.2 (équipotence des bases en dimension finie)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Définition 2.3 (dimension d'un espace de dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Le nombre d'éléments commun à toutes les bases de E est appelé dimension de E.
Il est noté $\dim(E)$ (c'est un entier naturel).

Cas particuliers :
- $\dim(E) = 0$ si et seulement si E est l'espace vectoriel nul.
- Un espace vectoriel E de dimension 1 est appelé droite vectorielle.
  E est une droite vectorielle si et seulement s'il est engendré par un vecteur non nul.
- Un espace vectoriel E de dimension 2 est appelé plan vectoriel.
  E est un plan vectoriel si et seulement s'il est engendré par deux vecteurs non colinéaires.

Exemples à connaître :
- $\mathbb{K}^n$ est de dimension n.
- $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$.
- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension np. En particulier, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2.
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, admettant pour base la famille (1).
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, admettant pour base la famille $(1,\mathbf{i})$.

Théorème 2.4 (dimension d'un espace vectoriel produit)

Soient $E_1\,,\cdots,E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
L'espace vectoriel $E_1 \times \cdots \times E_n$ est de dimension finie, et $\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n)$.

Cas particulier : $\dim(E^n) = n\dim(E)$.

2.2 Espaces de dimension infinie

Espaces de dimension infinie : On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension infinie s'il n'est pas de dimension finie. Dans ce cas, on note $\dim(E) = +\infty$.

Méthode : *Pour montrer qu'un espace est de dimension infinie, on procède par l'absurde en supposant qu'il est de dimension $n \in \mathbb{N}$ et on exhibe une famille libre composée de $n+1$ vecteurs afin de rentrer en contradiction avec le lemme de la dimension.*

Exemples 2.5 : Les espaces vectoriels suivants sont de dimension infinie :
- l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{K}[X]$;
- $\mathscr{F}(D\,;\mathbb{K})$ avec D une partie infinie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$
  (plus généralement, tout espace vectoriel de $\mathscr{F}(D\,;\mathbb{K})$ contenant les fonctions polynomiales) ;
- l'espace vectoriel des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2.3 Espaces de dimension finie et familles de vecteurs

Conséquences du « lemme de la dimension » : Dans un espace de dimension finie :
- le nombre d'éléments d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension ;
- le nombre d'éléments d'une famille génératrice est supérieur ou égal à la dimension.

En particulier, le nombre d'éléments d'une famille libre est inférieur ou égal à celui d'une famille génératrice.

Théorème 2.6 (familles dont le nombre d'éléments est égal à la dimension)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $\mathscr{F}$ une famille de E composée de n vecteurs, avec $n = \dim(E)$. On a alors les équivalences suivantes : $\mathscr{F}$ est une base $\Leftrightarrow$ $\mathscr{F}$ est libre $\Leftrightarrow$ $\mathscr{F}$ est génératrice.

Conséquence : Pour montrer qu'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre **ou** génératrice.

Exemple 2.7 : Montrer que la famille ((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.8 : Redémontrer la formule de Taylor polynomiale.

3 Sous-espaces vectoriels et dimension

3.1 Sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie

Théorème 3.1 (dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Alors F est de dimension finie, et on a l'inégalité $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. Cas d'égalité : $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$.

Méthode : *Pour montrer une égalité entre deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2, il suffit de montrer que l'un est inclus dans l'autre et que les dimensions sont égales.*

Exemple 3.2 : Montrer que $\{P \in \mathbb{K}_n[X],\, P(1) = 0\} = \mathrm{Vect}(X-1, \ldots, (X-1)^n)$.

Cas particuliers dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

1. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont :
   - le sous-espace nul ;
   - les droites vectorielles ;
   - $\mathbb{R}^2$.
2. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont :
   - le sous-espace nul ;
   - les droites vectorielles ;
   - les plans vectoriels ;
   - $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.3 (base adaptée à un sous-espace)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit F un sous-espace vectoriel de E.
On dit qu'une base $\mathscr{B}$ de E est adaptée au sous-espace vectoriel F si les premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une base de F.

Remarque : Une telle base existe toujours, d'après le théorème de la base incomplète.
En effet, on peut compléter une base de F (qui est une famille libre de E) en une base de E.

Exemple 3.4 : Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\, P(0) = P(1)\}$. Déterminer une base de $\mathbb{R}_3[X]$ adaptée à F.

3.2 Hyperplans en dimension finie

Définition 3.5 (hyperplan en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit H un sous-espace vectoriel de E.
Lorsque $\dim(H) = \dim(E) - 1$, on dit que H est un hyperplan de E.

Nous verrons plus tard dans l'année la véritable définition d'un hyperplan.

Exemple 3.6 : Soit $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ , } x + y + z = 0\right\}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Cas particuliers dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles et les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans vectoriels.

Exemple 3.7 : Montrer que $H = \{P \in \mathbb{K}_n[X],\, P(0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$.

3.3 Somme de deux sous-espaces de dimensions finies

Théorème 3.8 (dimension d'une somme directe)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E que l'on suppose en somme directe.
Alors le sous-espace vectoriel $F \oplus G$ est de dimension finie, et on a la formule suivante pour la dimension :

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Remarque : Dans la démonstration, en notant $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de G, on montre que la famille $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}' \underset{\text{def}}{=} (e_1, \ldots, e_n, e'_1, \ldots, e'_p)$ est une base de $F \oplus G$, ce qui donne l'égalité des dimensions souhaitée. Une telle base est dite <u>adaptée à la décomposition en somme directe $F \oplus G$</u>.

Théorème 3.9 (existence et dimension commune des supplémentaires en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Le sous-espace vectoriel F possède un supplémentaire.
2. Tous les supplémentaires de F ont la même dimension $\dim(E) - \dim(F)$.

Méthode : *Pour fabriquer un supplémentaire, on complète une base de F en une base de E. Il y a plusieurs façons de le faire, on retrouve le fait qu'il n'y ait pas un unique supplémentaire.*

Exemple 3.10 : Soit $F = \text{Vect}\left((2,1,2),(3,2,4)\right)$. Proposer un supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^3$, puis donner une base adaptée à la décomposition $F \oplus G$.

Théorème 3.11 (formule de Grassmann)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.
Alors le sous-espace vectoriel $F+G$ est de dimension finie, et on a la formule suivante pour la dimension :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Remarque : En particulier, $\dim(F + G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.
De plus, l'égalité est vérifiée si et seulement si la somme est directe.

Proposition 3.12 (caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
Si deux des trois assertions suivantes sont vraies :

1. $F + G = E$;
2. $F \cap G = \{0_E\}$;
3. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$;

alors F et G sont supplémentaires dans E.

Méthode : *Le plus souvent, on montre que $F \cap G = \{0_E\}$ et que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ pour montrer que F et G sont supplémentaires dans E.*

Exemple 3.13 : Soient $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, x + 2y + 3z = 0\right\}$ et $G = \text{Vect}\left((0,1,0)\right)$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

4 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 4.1 (rang d'une famille)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.
On appelle rang de la famille $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$, la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

Méthode : *Afin de déterminer* $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$*, on peut utiliser le théorème de la base extraite.*

Exemple 4.2 : Déterminer $\mathrm{rg}(1,X,3X+5)$.

Exemple 4.3 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $u,v \in E$.

- $\mathrm{rg}(u) = \begin{cases} 1 \text{ si } u \neq 0_E. \\ 0 \text{ si } u = 0_E. \end{cases}$
- $\mathrm{rg}(u,v) = \begin{cases} 2 \text{ si } u \text{ et } v \text{ sont linéairement indépendants.} \\ 1 \text{ si } u \text{ et } v \text{ sont linéairement dépendants et non tous les deux nuls.} \\ 0 \text{ si } u \text{ et } v \text{ sont tous les deux nuls.} \end{cases}$

Propriétés du rang : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

1. Si $\mathscr{F}'$ est une sous-famille de $\mathscr{F}$, alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}') \leqslant \mathrm{rg}(\mathscr{F})$.
2. $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{F})$, avec l'égalité si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre.
3. Si E est de dimension finie, alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice de E.
4. Si $\mathscr{F}$ contient une sous-famille libre $\mathscr{F}'$ de p vecteurs, alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \geqslant p$, avec égalité ssi $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}')$.
5. Soit $v \in E$. Si $v \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$, alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F},v) = \mathrm{rg}(\mathscr{F})$.

Exemple 4.4 : On définit les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,-1,2,3) \qquad v_2 = (1,1,2,0) \qquad v_3 = (3,-1,6,-6) \qquad w_1 = (0,-2,0,3) \qquad w_2 = (1,0,1,0)$$

1. Déterminer le rang des familles (v_1,v_2,v_3) et (w_1,w_2).
2. On note $F = \mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(w_1,w_2)$. Déterminer $F \cap G$.