Chapitre 17 : Espaces vectoriels

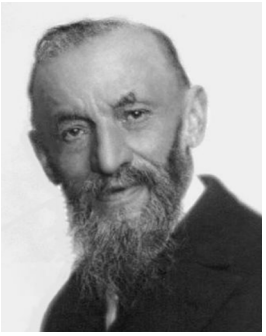
Table des matières

1 Espaces vectoriels **2**
1.1 Définition . . . 2
1.2 Exemples : espaces vectoriels usuels . . . 3
1.3 Calculs dans un espace vectoriel . . . 3

2 Sous-espaces vectoriels **4**
2.1 Définition . . . 4
2.2 Exemples : sous-espaces vectoriels usuels . . . 4
2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie . . . 5
2.4 Sommes de sous-espaces vectoriels . . . 6
2.5 Somme directe de sous-espaces vectoriels . . . 6
2.6 Sous-espaces supplémentaires . . . 7

3 Familles finies de vecteurs **7**
3.1 Familles libres et liées . . . 8
3.2 Familles génératrices . . . 9
3.3 Bases et coordonnées . . . 10

Les espaces vectoriels sont une composante essentielle du développement de l'algèbre linéaire et des mathématiques modernes. Les espaces vectoriels, aussi appelés espaces linéaires, constituent une généralisation des notions de vecteurs en géométrie. Ils permettent d'abstraire et d'étudier des objets mathématiques dans des dimensions multiples, ouvrant la voie à des applications en physique, en ingénierie et en informatique.
Un moment clé dans l'évolution de cette théorie se situe à la fin du XIXe siècle, lorsque les mathématiciens commencent à formaliser les structures algébriques. Giuseppe Peano, un mathématicien italien, joue un rôle crucial dans cette formalisation. En 1888, Peano publie *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, où il réinterprète les idées d'Hermann Grassmann, un pionnier de l'algèbre des vecteurs. Peano est parmi les premiers à définir rigoureusement les concepts de vecteurs et d'espaces vectoriels. Il introduit également les bases de l'axiomatisation en mathématiques, établissant des fondements formels qui influenceront durablement le développement des espaces vectoriels et de l'algèbre linéaire.



Giuseppe Peano
(1858-1932)

Notation : $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition

Définition 1.1 ($\mathbb{K}$-espace vectoriel)

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) est un triplet $(E, +, \cdot)$ où E est un ensemble, $+ : E \times E \mapsto E$ est une loi de composition interne et $. : \mathbb{K} \times E \mapsto E$ est une loi de composition externe vérifiant les propriétés ci-dessous.

La loi + vérifie les propriétés suivantes :
- Commutativité : $\forall (x,y) \in E^2$, $x + y = y + x$.
- Associativité : $\forall (x,y,z) \in E^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- Existence d'un élément neutre : $\exists\, 0_E \in E$ tel que $\forall x \in E$, $x + 0_E = x$.
- Existence d'un symétrique : $\forall x \in E$, $\exists y \in E$ tel que $x + y = 0_E$.

La loi . vérifie les propriétés suivantes :
- Distributivité sur + : $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$.
- Distributivité sur $+_{\mathbb{K}}$: $\forall x \in E$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda +_{\mathbb{K}} \mu).x = \lambda.x + \mu.x$.
- Compatibilité avec $1_{\mathbb{K}}$: $\forall x \in E$, $1_{\mathbb{K}}.x = x$.
- Compatibilité avec $\times_{\mathbb{K}}$: $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu).x = \lambda.(\mu.x)$.

Les éléments de E sont appelés des vecteurs. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires. L'élément neutre pour la loi + sur E est noté 0_E. Il est appelé vecteur nul.

Par abus de langage, on dit plus simplement que E est un espace vectoriel (au lieu du triplet $(E, +, \cdot)$).
Par abus également, on n'écrit pas la loi $\cdot$: on note λx au lieu de $\lambda \cdot x$.

Remarque : On peut définir la notion d'espace vectoriel sur n'importe quel corps $\mathbb{K}$.
Le programme des classes préparatoires se limite à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Théorème 1.2 (produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels)

Soient $E_1, \cdots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (avec $n \in \mathbb{N}^*$).
Alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec les loi + et $\cdot$ définies de la manière suivante :
1. $\forall x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$: $\quad x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$
2. $\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $\quad \lambda x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$

Remarque : Le vecteur nul de cet espace vectoriel est le n-uplet $(0_{E_1}, \cdots, 0_{E_n})$.

Cas particulier : Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors E^n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

Théorème 1.3 (espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et Ω un ensemble non vide.
Alors E^Ω (ensemble des fonctions de Ω dans E) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec les lois + et $\cdot$ définies de la manière suivante :
1. $\forall f, g \in E^\Omega$: $\quad f + g$ est la fonction de Ω dans E définie par $\omega \mapsto f(\omega) + g(\omega)$.
2. $\forall f \in E^\Omega$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $\quad \lambda f$ est la fonction de Ω dans E définie par $\omega \mapsto \lambda f(\omega)$.

Remarque : Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la fonction nulle $\omega \mapsto 0_E$.

Cas particulier : L'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de E est un espace vectoriel.

1.2 Exemples : espaces vectoriels usuels

Les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

1. $\mathbb{K}^n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).
   Cas particuliers :
   - $\mathbb{R}^2$ représente l'ensemble des points ou des vecteurs du plan.
   - $\mathbb{R}^3$ représente l'ensemble des points ou des vecteurs de l'espace.
   - Pour $n = 1$: $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dans lequel la loi $\cdot$ n'est rien d'autre que la multiplication usuelle sur $\mathbb{K}$.
2. $\mathbb{K}^\Omega = \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{K})$: $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions de Ω dans $\mathbb{K}$ (pour Ω ensemble non vide quelconque).
   Cas particulier : $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.
3. $\mathbb{K}[X]$: $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
4. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (pour $n,p \in \mathbb{N}^*$) : $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes.
5. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque : Un singleton (ensemble à 1 élément) peut être muni d'une structure d'espace vectoriel pour lequel les lois $+$ et $\cdot$ sont définies de manière triviale.
On dit qu'il s'agit de l'espace vectoriel nul ou trivial, qui est réduit à $\{0_E\}$.

1.3 Calculs dans un espace vectoriel

Proposition 1.4 (propriétés de calcul dans un espace vectoriel)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, x et y des vecteurs de E, λ et $\mu \in \mathbb{K}$ des scalaires.

1. $0_\mathbb{K} x = 0_E$
2. $\lambda 0_E = 0_E$
3. $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda x)$ (que l'on peut donc noter $-\lambda x$ sans ambiguïté)
4. $\lambda x = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0_\mathbb{K}$ ou $x = 0_E$.
5. Si $\lambda \neq 0$ et $\lambda x = \lambda y$, alors $x = y$.
6. Si $x \neq 0_E$ et $\lambda x = \mu x$, alors $\lambda = \mu$.

Définition 1.5 (vecteurs colinéaires)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient x et y deux vecteurs de E.
On dit que les vecteurs x et y sont <u>colinéaires</u> lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

Remarques :

1. Le vecteur nul est colinéaire avec n'importe quel vecteur.
2. Si x et y sont des vecteurs non nuls de E, ils sont colinéaires si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $x = \lambda y$.

Définition 1.6 (combinaison linéaire)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et x, y des vecteurs de E.
Une <u>combinaison linéaire de x et y</u> est un vecteur de E qui est de la forme $\lambda x + \mu y$, où λ et $\mu \in \mathbb{K}$.

Plus généralement, une combinaison linéaire de n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition

Définition 2.1 (sous-espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Un sous-espace vectoriel de E est un ensemble F tel que :

1. $F \subset E$;
2. F contient 0_E ;
3. F est stable par combinaison linéaire, *i.e.* : $\forall x,y \in F$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}$, $\lambda x + \mu y \in F$.

Remarques :

1. Un sous-espace vectoriel est aussi stable par combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs.
2. E et $\{0_E\}$ sont toujours des sous-espaces vectoriels de E. Le sous-espace $\{0_E\}$ est appelé sous-espace nul.

Variantes :

1. On peut remplacer « F contient 0_E » par « F est non vide ».
2. On peut séparer la propriété de stabilité par combinaison linéaire en :
   (i) F est stable par somme : $\forall x,y \in F$, $x + y \in F$
   (ii) F est stable par la loi externe : $\forall x \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in F$
3. On peut remplacer la propriété de stabilité par combinaison linéaire par : $\boxed{\forall x,y \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x + \lambda y \in F}$.

Exemple 2.2 : Soit $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x + y + z = 0\right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 2.3 (un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit F un sous-espace vectoriel de E.
Alors F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pour les lois $+$ et $\cdot$ induites sur F.

Méthode : *Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, il est toujours plus simple de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel déjà connu.*

2.2 Exemples : sous-espaces vectoriels usuels

1. Dans $\mathbb{R}^2$, les droites passant par l'origine $0_{\mathbb{R}^2}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
   De telles droites sont appelées droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:
   - les droites passant par l'origine $0_{\mathbb{R}^3}$, appelées droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$;
   - les plans passant par l'origine $0_{\mathbb{R}^3}$, appelés plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:
   - l'ensemble des suites bornées ;
   - l'ensemble des suites convergentes.
4. Soit I un intervalle non trivial. Les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^I$:
   - l'ensemble des fonctions bornées sur I ;
   - $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$ (ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I) ;
5. $\mathbb{K}_n[X]$ (ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
6. $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ (ensembles des matrices symétriques et antisymétriques) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
7. $\mathbb{R}$ et $\mathbf{i}\mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Théorème 2.4 (intersection de sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit I un ensemble non vide, et soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.
Alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Cas particulier : intersection finie. Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E (avec $n \in \mathbb{N}^*$), alors $F_1 \cap \ldots \cap F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 2.5 : Soit $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x+y+z=0 \text{ et } x-z=0\big\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.6 (sous-espace vectoriel engendré par une partie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit X une partie de E.
On appelle <u>sous-espace vectoriel engendré par X</u>, noté $\mathrm{Vect}(X)$, le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant X.

Démonstration de l'existence et de l'unicité de $\mathrm{Vect}(X)$ *:*
Existence : On note F l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X.
Alors F est un sous-espace vectoriel de E d'après le théorème 2.4, et il est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant X (par définition de F).
Unicité : Si F et F' sont deux sous-espaces vectoriels contenant X et minimaux au sens de l'inclusion (parmi tous les sous-espaces vectoriels qui contiennent X), alors ils sont inclus l'un dans l'autre, donc égaux. □

Remarques :

1. $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$
2. Si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient X, alors $\mathrm{Vect}(X) \subset F$.

Cas d'une partie finie :
Lorsque $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on note aussi $\mathrm{Vect}(X) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Vect}(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$.

Théorème 2.7 (espace vectoriel engendré par un nombre fini de vecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $x_1, \ldots, x_n \in E$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).
Alors $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$:

$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ / \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}$$

Méthode : *Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel, il suffit de trouver des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ tels que $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.*

Exemple 2.8 : Montrer que $F = \big\{(x,y,-x) \ , \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Cas particuliers : droites vectorielles et plans vectoriels

Définition 2.9 (droite vectorielle)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une droite vectorielle de E est un sous-espace vectoriel de E qui est engendré par un vecteur non nul de E.

Dans ce cas, $\text{Vect}(x) = \{\lambda x \ / \ \lambda \in \mathbb{K}\}$ est aussi noté $\mathbb{K}x$.

Définition 2.10 (plan vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un plan vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E qui est engendré par deux vecteurs non colinéaires de E.

2.4 Sommes de sous-espaces vectoriels

Remarque : Une union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas forcément un sous-espace vectoriel.

Exemple 2.11 : Soit $F = \{(0,x)\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$ et soit $G = \{(x,0)\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. L'espace $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel ?

Définition 2.12 (sommes de deux sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
La somme de F et G, notée $F + G$, est l'ensemble suivant :

$$F + G = \{u + v \ / \ u \in F,\ v \in G\}.$$

Exemple 2.13 : Soit $F = \{(0,x)\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x,0)\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$. Déterminer $F + G$.

Proposition 2.14 (la somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
La somme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. Plus précisément, $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$.

Remarque : Il ne faut pas confondre $F + G$ et $F \cup G$.

1. $F \cup G$ n'est pas toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in F \cup G \Leftrightarrow (x \in F$ ou $x \in G)$.
2. $F + G$ est toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in F + G \Leftrightarrow \exists (u,v) \in F \times G$ tel que $x = u + v$.

2.5 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Remarque : Tout élément x de la somme $F + G$ se décompose sous la forme $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Il n'y a pas toujours unicité de cette décomposition.

Exemple 2.15 : Soit $F = \text{Vect}\left((1,0,-1),(0,1,-1)\right)$ et $G = \text{Vect}\left((1,0,1),(0,1,0)\right)$. Le vecteur $(1,2,1)$ appartient à $F + G$ avec au moins deux décompositions possibles : $(1,2,1) = \underbrace{(1,-2,1)}_{\in F} + \underbrace{(0,4,0)}_{\in G} = \underbrace{(-1,2,-1)}_{\in F} + \underbrace{(2,0,2)}_{\in G}$.

Définition 2.16 (somme directe de deux sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme $F+G$ est une <u>somme directe</u> lorsque la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique, c'est-à-dire :

$$\forall w \in F+G,\ \exists!(u\,,v) \in F \times G,\ w = u+v.$$

Dans ce cas, la somme $F+G$ est notée $F \oplus G$.

Remarque : Pour montrer qu'une somme est directe, on utilise plutôt la caractérisation suivante.

Proposition 2.17 (caractérisation d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
La somme $F+G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Exemple 2.18 : Soit $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\big\}$ et $G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x=y=z\big\}$
Montrer que ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ en somme directe.

2.6 Sous-espaces supplémentaires

Définition 2.19 (sous-espaces vectoriels supplémentaires)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que les sous-espaces F et G sont <u>supplémentaires</u> lorsque tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G, c'est-à-dire :

$$\forall w \in E,\ \exists!(u\,,v) \in F \times G,\ w = u+v.$$

Proposition 2.20 (caractérisation des sous-espaces vectoriels supplémentaires)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
F et G sont supplémentaires si et seulement si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire :

1. $E = F+G$;
2. la somme $F+G$ est directe.

Méthodes : *Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires :*

1. *soit on montre que tout élément x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = u+v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ (raisonnement par analyse et synthèse) ;*
2. *soit on montre que* $\mathrm{Vect}(F \cup G) = E$ *et que* $F \cap G = \{0_E\}$.

Exemple 2.21 : Montrer que $\mathrm{Vect}(X)$ et $\left\{P \in \mathbb{K}[X],\ \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

3 Familles finies de vecteurs

Une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un n-uplet $(v_1\,,\ldots,v_n) \in E^n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1 Familles libres et liées

Définition 3.1 (famille libre, famille liée)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de E (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

- On dit que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une <u>famille libre</u> lorsque la combinaison linéaire nulle des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ est la combinaison linéaire triviale, c'est-à-dire :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0$$

- On dit que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une <u>famille liée</u> lorsqu'elle n'est pas libre, c'est-à-dire lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale de ces vecteurs qui est nulle :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, \dots, 0)\},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E$$

Remarques :

1. Une famille contenant le vecteur nul, ou contenant plusieurs fois le même vecteur, est liée.
2. Une sous-famille d'une famille libre est libre. Une famille qui contient une famille liée est liée.

Exemple 3.2 : Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$ est liée car $1.(1,2,3) - 2.(4,5,6) + 1.(7,8,9) = (0,0,0)$. Montrer que la famille $((1,2,3),(7,8,9),(12,13,4),(-2,-4,-6))$ est également liée.

Exemple 3.3 : Montrer que les familles suivantes sont libres :

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}_1 = ((1,4),(2,7))$.
2. Dans $E = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{F}_2 = (\cos, \sin)$.
3. Dans $E = \mathbb{R}[X]$, et $\mathcal{F}_3 = (X+5, X-1, (X-1)^2)$.
4. Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}_4 = ((u_n),(v_n))$ où $u_n = \text{Arctan}(n)$ et $v_n = \text{Arctan}(2n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3.4 : Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, notons e_k le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont la k-ième composante vaut 1 et les autres valent 0. La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre.

Exemple 3.5 : La famille $(E_{1,1}, \dots, E_{n,p})$ composée des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est libre.

Familles libres dans $\mathbb{C}$:
On rappelle que $\mathbb{C}$ peut être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
La famille $(1,\mathbf{i})$ est libre dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et liée dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Proposition 3.6 (famille de deux vecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit (v_1, v_2) une famille de vecteurs de E.

1. La famille (v_1, v_2) est liée si et seulement si v_1 et v_2 sont colinéaires.
2. La famille (v_1, v_2) est libre si et seulement si v_1 et v_2 sont non colinéaires.

Proposition 3.7 (une famille de polynômes à degrés distincts est libre)

Soient $P_1, \dots, P_n$ des polynômes non nuls de degrés distincts de $\mathbb{K}[X]$.
Alors la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est libre.

Vocabulaire : Si la famille des degrés $(\deg(P_1), \dots, \deg(P_n))$ est strictement croissante ou strictement décroissante : on dit dans ce cas que la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est <u>échelonnée en degré</u>.

Exemple 3.8 : La famille $(1,X,X^2,\dots,X^n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 3.9 (unicité des coefficients pour une combinaison linéaire d'une famille libre)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(v_1\,,\dots,v_n)$ une famille finie de vecteurs de E (avec $n\in\mathbb{N}^*$).
Si la famille $(v_1\,,\dots,v_n)$ est libre, alors :

$$\forall(\lambda_1\,,\dots,\lambda_n),(\lambda'_1\,,\dots,\lambda'_n)\in\mathbb{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda'_i v_i \implies \forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i=\lambda'_i$$

Autrement dit, si deux combinaisons linéaires de $v_1\,,\dots,v_n$ sont égales, alors les coefficients sont égaux.

Proposition 3.10 (somme directe d'espaces vectoriels engendrés par les vecteurs d'une famille libre)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, k et $n\in\mathbb{N}^*$ tels que $k\leqslant n$ et $(v_1,\dots,v_n)$ une famille libre de E.
Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_k)$ et $\mathrm{Vect}(v_{k+1},\dots,v_n)$ sont en somme directe.

Proposition 3.11 (ajout d'un vecteur à une famille libre)

Soit $(v_1,\dots,v_n)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (avec $n\in\mathbb{N}$), et soit w un vecteur de E.
La famille $(v_1,\dots,v_n,w)$ est libre si et seulement si $w\notin\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_n)$.

Conséquence : Une famille de trois vecteurs $(v_1\,,v_2\,,v_3)$ est libre si et seulement si v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires et v_3 n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(v_1\,,v_2)$.

3.2 Familles génératrices

Définition 3.12 (famille génératrice)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(v_1\,,\dots,v_n)$ une famille finie de vecteurs de E (avec $n\in\mathbb{N}^*$).
On dit que la famille $(v_1\,,\dots,v_n)$ est une <u>famille génératrice</u> de E lorsque $E=\mathrm{Vect}(v_1\,,\dots,v_n)$.

Autrement dit, $(v_1\,,\dots,v_n)$ est une famille génératrice de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $v_1\,,\dots,v_n$, *i.e.* $\forall v\in E,\ \exists(\lambda_1\,,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ v=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i$.

Remarques :
- Une famille de E qui contient une famille génératrice est encore génératrice.
- Pour une famille infinie, on dit que $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice de E lorsque $E=\mathrm{Vect}((v_i)_{i\in I})$.

Exemple 3.13 : La famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 3.14 : La famille $(E_{1,1},\dots,E_{n,p})$ est génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 3.15 : La famille $(1,X,X^2,\dots,X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

Familles génératrices dans $\mathbb{C}$:
On rappelle que $\mathbb{C}$ peut être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
La famille $(1,\mathbf{i})$ est génératrice dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
La famille (1) est génératrice dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel mais ne l'est pas dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3.3 Bases et coordonnées

Définition 3.16 (base)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de E (avec $n \in \mathbb{N}^*$).
On dit que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E lorsqu'elle est à la fois libre et génératrice de E.

Théorème 3.17 (caractérisation d'une base et coordonnées dans une base)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de E (avec $n \in \mathbb{N}^*$).
La famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$:

$$\forall v \in E,\ \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Dans ce cas, on appelle coordonnées du vecteur v dans cette base les uniques scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Remarque : Le caractère générateur fournit l'existence et la liberté fournit l'unicité.

Bases canoniques :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle base canonique de $\mathbb{K}^n$ la base $(e_1, \ldots, e_n)$, où, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, e_k est le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont la k-ième composante vaut 1 et les autres valent 0. Dans cette base, les coordonnées d'un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ sont ses composantes $x_1, \ldots, x_n$.
2. Soit $n,p \in \mathbb{N}^*$. On appelle base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la base $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$.
   Dans cette base, les coordonnées d'une matrice $A = (a_{i,j})$ sont ses coefficients $a_{1,1}, \ldots, a_{n,p}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ la base $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.

   Dans cette base, les coordonnées d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ sont ses coefficients $a_0, \ldots, a_n$.

Exemple 3.18 : Montrer que la famille $((1,1,1),(1,1,0),(0,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer les coordonnées du vecteur $(2,-5,2)$ dans cette base.